مذكرة الجبر

الصف الثانى الثانوى
(القسم الادبى)

الفصل الدراسى الثانى

٢٠١٩ / ٢٠٢٠

منتدى توجيه الرياضيات
م/عادل ادوار

المتتابعات والمتسلسلات

تعريف (المتتابعة) هى دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ص$_+$

أو مجموعة جزئية منها ومجالها المقابل هو مجموعى الأعداد الصحيحة ع

د : ص$_+$ ⟵ ع

د : {١،٢،٣،٤ .... ، ن} ⟵ ع

المتتابعة غير منتهية : المجال (رتب الحدود) ⟵ قيم الحدود

الحد النونى : الحد العام للمتتابعة ع$_ن$

هو دالة فى ن من الدرجة الأولى ويكون أساسها هو معامل ن . يمكن بواسطته ايجاد أى حد من حدود المتتابعة كم يمكن ايجاد المتتابعة نفسها .

مثلا (١) المتتابعة (٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ......) هى متتابعة حدها العام ع$_ن$ = ٢ ن +١

(٢) المتتابعة ($-\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $-\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، .....) حدها العام ع$_ن$ = $\frac{(-١)^ن}{ن+١}$

ملاحظات هامة :

(١) حدود المتتابعة هى صور عناصر مجال المتتابعة

(٢) الرمز (ع$_ن$) يعبر عن المتتابعة بينهما الرمز ع$_ن$ يعبر عن حدها النونى

(٣) تخضع المتتابعة لترتيب عناصرها ويمكن حصر هذة العناصر

(٤) المتتابعة المنتهية : عدد حدودها منتهيا أى يمكن حصره أو عده

(٥) المتتابعة غير المنتهية عدد حدودها غير منتهٍ اى عدد لا نهائى لا يمكن حصره

(٦) تمثل المتتابعة بيانيا على أنها دالة من خلال تمثيل الأزواج المرتبة بنقاط منفصلة فى المستوى الأحداثى .

(٧) المتتابعة (ع$_ن$) تكون تزايدية: إذا كان ع$_{ن+١}$ > ع$_ن$

تكون تناقصية : إذا كان ع$_{ن+١}$ < ع$_ن$

(٨) المتتابعة الثابتة : جميع حدودها متساوية أى ع$_ن$ = م منتهية أو غير منتهية

مثـ١ـال : أكتب الحدالعام لكل من المتتابعات التالية

ⓐ (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، .....) ⓑ (-١ ، ٤ ، -٩ ، ١٦ ، ....)

الحـــــل

ⓐ متتابعة الأعداد الزوجية ∴ $ع_ن = ٢ ن$

ⓑ $ع_١ = (-١)^١ × (١)^٢ = -١$ ، $ع_٢ = (-١)^٢ × (٢)^٢ = ٤$

$ع_٣ = (-١)^٣ × (٣)^٢ = -٩$ ، $ع_٤ = (-١)^٤ × (٤)^٢ = ١٦$

∴ $ع_ن = (-١)^ن × (ن)^٢$

مثـ٢ـال : أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة ($ع_ن$) المعرفة

$ع_١ = ٣$ ، $ع_ن = ٢ ع_{ن-١}$ حيث $ن \geqslant ٢$

الحـــــل

بوضع ن = ٢ ∴ $ع_٢ = ٢ × ٣ = ٦$

ن = ٣ ∴ $ع_٣ = ٢ × ٦ = ١٢$

ن = ٤ ∴ $ع_٤ = ٢ × ١٢ = ٢٤$

ن = ٥ ∴ $ع_٥ = ٢ × ٢٤ = ٤٨$

الحدود الخمسة هى (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨)

التعبير عن المتتابعة:

حيث أن مجال المتتابعة هو دائماً $ص^+$ أو مجموعة جزئية منها فيكون بيانها:

د= {(١،د(١)) ، (٢،د(٢)) ، (٣،د(٣)) ، ..(ر،د(ر))،...}

أي أن المسقط الأول للأزواج المرتبة في بيان الدالة هي عناصر $ص^+$ لذلك يمكن

عدم كتابة المسقط الأول ونكتفي بكتابة المسقط الثاني داخل قوسين على الشكل :

( ) لتمييزها عن قوسي المجموعة أي أن يمكن التعبير عن المتتابعة:

(د(١)، د(٢)، د(٣)، ....د(ر)، ....)

وتسمى د(١) بالحد الأول للمتتابعة ويرمز لها بالرمز $ع_١$

وتسمى د(٢) بالحد الثاني للمتتابعة ويرمز لها بالرمز $ع_٢$

وتسمى د(٣) بالحد الثالث للمتتابعة ويرمز لها بالرمز $ع_٣$

وتسمى د(ر) بالحد الرائي للمتتابعة ويرمز لها بالرمز $ع_ر$

وبذلك يمكننا كتابة المتتابعة على الصورة: ($ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ ،......، $ع_ر$ ،.......)

مثـــ٣ــال: اكتب بيان الدالة د: $ص^+$ ⟵ ع حيث

(أ) د(ن) = ٢ ن +١ (ب) د(ن) = $٣^ن$

الحــــل

(أ) د={(١،د(١)) ، (٢،د(٢)) ، (٣،د(٣)) ، ..(ر،د(ر))..}

={(١،٣) ، (٢،٥) ، (٣،٧) ،...(ر ، ٢ ر + ١)..}

(ب) حيث د(ن) = $٣^ن$

د = {(١،٣) ، (٢،٩) ، (٣،٢٧) ، ...(ر، $٣^ر$)..}

مثـــ٤ـــال : اكتب كلا من المتتابعات التى حدها النونى يعطى بالعلاقة:

(أ) $ع_ن$ = ١ ـ ٣ ن (إلى خمسة حدود من الحدود ابتداءً من الحد الاول)

(ب) $ع_ن$ = $ن^٣$ (إلى عدد غير منته من الحدود ابتداءً من الحد الاول)

الحــــــل

(أ) بوضع ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ∴ $ع_١$ = ١ ـ ١× ٣ = ـ٢

∴ $ع_٢$ = ١ ـ ٢ × ٣ = ـ ٥ ، $ع_٣$ = ١ ـ ٣ × ٣ = ـ ٨

∴ $ع_٤$ = ١ ـ ٤ × ٣ = ـ ١١ ، $ع_٥$ = ١ ـ ٥ × ٣ = ـ ١٤

الحدود الخمسة هى (ـ٢ ، ـ ٥ ، ـ ٨ ، ـ١١ ، ـ ١٤) متتابعة منتهية

(ب) بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ...... ∴ $ع_١$ = (١)^٣ = ١

، $ع_٢$ = (٢)^٣ = ٨ ، $ع_٣$ = (٣)^٣ = ٢٧، $ع_٤$ = (٤)^٣ = ٦٤

الحدود الخمسة هى (١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ....) غير منتهية

ملاحظات هامة: [١] لاحظ الفرق بين $ع_ر$ ، ($ع_ر$)

$ع_ر$ ترمز لحد واحد في المتتابعة هو الحد النوني "الحد العام". ($ع_ر$) يرمز للمتتابعة.

٢) القوسين { } يعبران عن مجموعة . أما القوسين ( ) يعبران عن متتابعة .

أ) عناصر المجموعة لا تتكرر أما عناصر المتتابعة يمكن أن تتكرر.

مثلاً يمكن أن تكتب المتتابعة (١، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ....)

ولا يمكن أن تكتب المجموعة { ١، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ....}

ب) ترتيب عناصر المجموعة غير مهم ولكن عناصر المتتابعة يجب أن يكون لها ترتيب محدد وهذا الترتيب صفة تميز المتتابعة.

مثلاً: { −٤، −٢، ٠، ٢، ٤} = {٤، ٢، ٠، −٢، −٤}

ولكن (−٤، −٢، ٠، ٢، ٤) ≠ (٤، ٢، ٠، −٢، −٤)

المتسلسلة : هى عملية جمع حدود المتتابعة.

و يستخدم رمز التجميع " $\sum$ " لكتابة المتسلسلات بصورة مختصرة.

مثلا (١ ، ٥ ، ٩ ، ١٣) هى متتابعة

بينما (١ + ٥ + ٩ + ١٣) هى المتسلسلة مرتبطة بالنتتابعة السابقة

-المتسلسلة المنتهية : تحتوى على عدد محدود من العناصر و تكتب بالصورة

$$\sum_{ر=١}^{ن} (ع_ر)$$

-المتسلسلة غير المنتهية : لا يمكن حصر عدد حدودها و تكتب بالصورة

$$\sum_{ر=١}^{\infty} (ع_ر)$$

مثـــ٦ـــال : اكتب مفكوك كلا من المتسلسلات الآتية ثم أوجد مجموع المفكوك ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

Ⓐ $\sum_{ر=٣}^{٧} (٢ر - ١)$ Ⓑ $\sum_{ر=١}^{٤} (ر + ١)^٢$

الحـــــــل

Ⓐ بوضع ر = ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦، ٧ ∴ $ع_١$ = ٢×٣ ـ ١ = ٥

$ع_٢$ = ٢×٤ ـ ١ = ٤ ، $ع_٣$ = ٢×٥ ـ ١ = ٧

$ع_٤$ = ٢×٦ ـ ١ = ١١ ، $ع_٥$ = ٢×٧ ـ ١ = ١٣

∴ المتسلسلة هى (٥ + ٧ + ٩ + ١١ + ١٣)

∴ $\sum_{ر=٣}^{٧} (٣ر - ١)$ = ٥ + ٧ + ٩ + ١١ + ١٣ = ٤٥

Ⓑ بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ∴ $ع_١ = (١+١)^٢ = ٤$

، $ع_٢ = (٢+١)^٢ = ٩$ ، $ع_٣ = (٣+١)^٢ = ١٦$، $ع_٤ = (٤+١)^٢ = ٢٥$

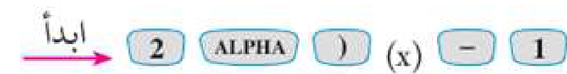
∴ المتسلسلة هى (٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥)

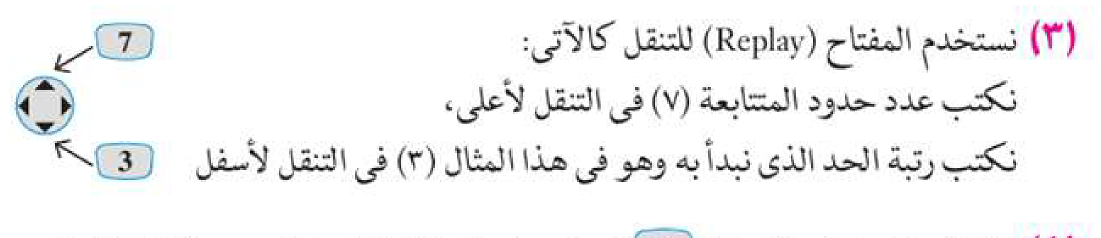
∴ $\sum_{ر=١}^{٤} (ر + ١)^٢$ = ٤ + ٩ + ١٦ + ٢٥ = ٥٤

استخدام الآلة الحاسبة العلمية لإيجاد ناتج المتسلسلة


(١) نضغط على مفتاح رمز التجميع Σ حسب اللون المحدد لذلك


(٢) نكتب قاعدة المتباينة (٢ر – ١) كالآتى:




(٣) نستخدم المفتاح (Replay) للتنقل كالآتى:

نكتب عدد حدود المتابعة (٧) فى التنقل لأعلى،

نكتب رتبة الحد الذى نبدأ به وهو فى هذا المثال (٣) فى التنقل لأسفل


(٤) نضغط على مفتاح الإدخال = ليعطى على الشاشة الناتج ٤٥ وهو مطابق لناتج الجمع السابق.

مثـــ٧ـــال : اكتب مفكوك كلا من المتسلسلات الآتية ثم أوجد مجموع المفكوك ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

(أ) $\sum_{\text{ر}=1}^{5} (\text{ر}^2 + 1)$ (ب) $\sum_{\text{ر}=1}^{4} \left(\frac{1}{\text{ر}+1} - \frac{1}{\text{ر}} \right)$

الحـــــل

(أ) بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

∴ المتسلسلة هى $\left((1)^2 + 1 + (2)^2 + 1 + (3)^2 + 1 + (4)^2 + 1 + (5)^2 + 1 \right)$

∴ $\sum_{\text{ر}=1}^{5} (\text{ر}^2 + 1) = 2 + 5 + 10 + 17 + 26 = 60$

(ب) بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ∴ $ع_1 = \left(\frac{1}{2} - 1\right)$

، $ع_2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$ ، $ع_3 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)$ ، $ع_4 = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right)$

∴ $\sum_{\text{ر}=1}^{4} \left(\frac{1}{\text{ر}+1} - \frac{1}{\text{ر}} \right) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{4}{5}$

تمـــــارين

أولا: إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه

(١) فى المتتابعة ($ع_ن$) حيث $ع_{ن+١} = ن ع_ن$ إذا كان $ع_١ = ١$ فإن $ع_ن$ = ..

أ ١ ب ٢ جـ ٣ د ٤

(٢) قاعدة المتتابعة ((٢×٣) ، (٣×٤) ، (٤×٥) ، (٥×٦) ، .....) هى .....

أ $(ن-١)(ن+١)$ ب $ن(ن+١)$ جـ $ن^٢(ن+١)$ د $(ن+١)(ن+٢)$

(٣) الحد العاشر من المتتابعة التى حدها النونى $ع_ن = \frac{٢}{ن} - ١$ حيث $ن \in ص^+$ هو ...

أ $-\frac{١}{٥}$ ب $\frac{١}{٥}$ جـ $\frac{٤}{٥}$ د $-\frac{٤}{٥}$

(٤) الحد الخامس من متتابعة الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمة على ٥ هو ...

أ ٥ ب ٢٥ جـ ٢- د ١-

ثانيا: أجب عن الأسئلة الآتية

[١] اكتب الخمسة حدود الأولى لكل من المتتابعات الآتية

أ $ع_ن = ن^٢ - ن$ ب $ع_ن = (\frac{١}{٢})^ن$ جـ $ع_ن = ن(-١)^ن$

[٢] اكتشف النمط ثم أكتب الحد التالى

أ ٣ ، ٦- ، ١٢ ، ٢٤- ، ٤٨ ب $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{١٠}$

المتتابعات الحسابية

الصورة العامة للمتتابعة الحسابية

(أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، .... ، ل – ٢ء ، ل- ء ، ل)

حيث أ الحد الأول ، ل الحد الأخير ، ء الأساس

اساس المتتابعة = ء = $ح_{ن+١} - ح_ن$ = أى حد – الحد السابق له مباشرة

عندما ء موجبة تكون المتتابعة متزايدة مثلا : (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ...)

عندما ء سالبة تكون المتتابعة متناقصة مثلا : (١٥ ، ١٢ ، ٩ ، ٦ ، ...)

عندما ء = ٠ تكون المتتابعة ثابتة ليست متتابعة حسابية

الحد العام فى المتتابعة الحسابية $ح_ن$ = ل = أ + (ن - ١) ء

حيث $ع_ن$ الحد النونى ، $ن$ رتبة الحد (وتسمى عدد الحدود فى حالة ما إذا كان الحد النونى هو الحد الأخير ل) ، ويلاحظ أن معامل ء ينقص بمقدار واحد عن رتبة الحد .

نظرية المتتابعة $ع_ن$ تكون متتابعة حسابية إذا كان حدها النونى مقدارمن الدرجة الأولى فى $ن$ ، ويكون أساسها هو معامل $ن$ فى $ع_ن$

ملاحظة: $ع_ن = ن^٢ + ٢$ ليست من الدرجة الأولى فلا تصلح أن تكون متتابعة حسابية

مثـــ١ــال : أثبت أن المتتابعة $ع_ن = (٥ — ٢ن)$ حسابية ثم اكتب الحدود الخمسة الأولى ثم أوجد $ع_{١٩}$

الحـــــــــل

∵ الحد النونى مقدار من الدرجة الأولى فى ن ∴ المتتابعة حسابية

$ح_١ = ٥ - ٢ = ٣$ ، $ح_٢ = ٥ - ٤ = ١$ ، $ح_٣ = ٥ - ٦ = -١$ ، ....

$(ح_ن) = (٣ ، ١ ، -١ ، -٣ ، -٥ ، ...)$

$ح_{١٩} = ٥ - ٢ × ١٩ = ٥ - ٣٨ = -٣٣$

التمثيل البيانى للمتتابعة الحسابية :

مثـــ٢ــال: أوجد الحدود الخمسة من المتتابعة $ع_ن = (٥ — ٢ن)$ ثم مثلهما بيانياً

الحـــــــل

$ح_١ = ٥ - ٢ = ٣$ ،

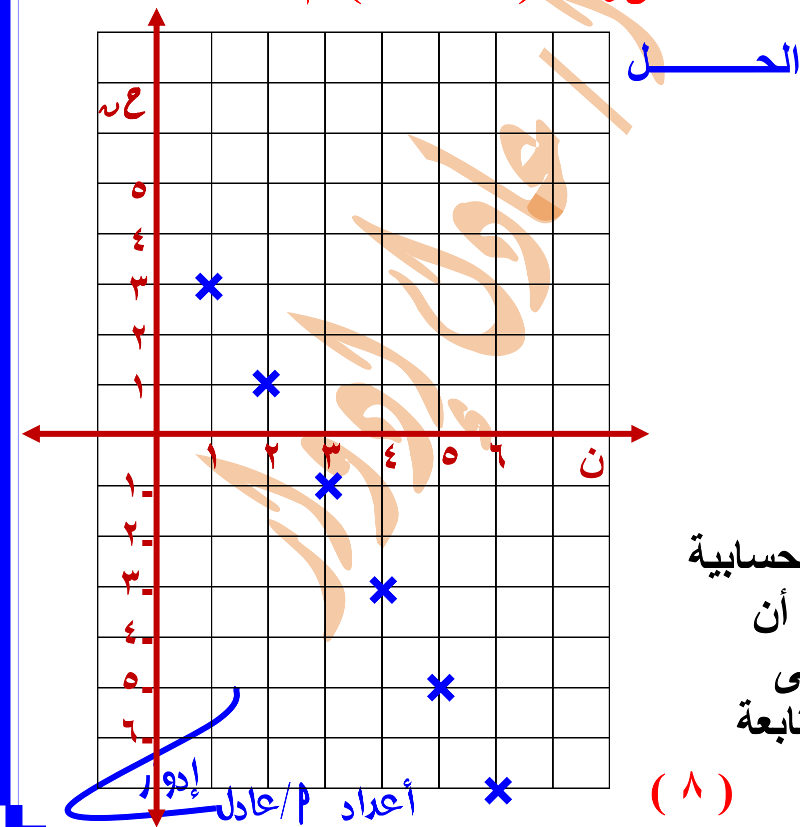
$ح_٢ = ٥ - ٤ = ١$ ،

$ح_٣ = ٥ - ٦ = -١$ ،

$ح_٤ = ٥ - ٢×٤ = -٣$

$ح_٥ = ٥ - ٢ × ٥ = -٥$

$ح_٦ = ٥ - ٢ × ٦ = -٧$



النقاط التى تمثل حدود المتتابعة الحسابية تقع على استقامة واحدة مما يعنى أن المتتابعة حسابية من الدرجة الأولى ويكون معامل $ن$ هو أساس المتتابعة

مثــــ٣ـــال: فى المتتابعة الحسابية (٢٥ ، ٢٨ ، ٣١ ، ...) أوجد $ح_{ن}$

الحـــــل

أ = ٢٥ ، ء = $ح_{٢}$ - $ح_{١}$ = ٢٨ ـ ٢٥ = ٣

$ح_{ن}$ = أ + (ن ـ ١) ء = ٢٥ + (ن ـ ١)×٣ = ٢٥ + ٣ن - ٣ = ٣ن +٢٢

مثــــ٤ـــال: فى المتتابعة الحسابية السابقة أوجد $ح_{١٠}$

الحـــــل

∵ $ح_{ن}$ = ٣ن +٢٢ ∴ $ح_{١٠}$ = ٣ × ١٠ + ٢٢ =٥٢

<u>حل آخر</u> المتتابعة الحسابية (٢٥ ، ٢٨ ، ٣١ ، ...) ⟸ أ = ٢٥ ، ء = ٣

$ح_{١٠}$ = أ + ٩ء = ٢٥ + ٩×٣ = ٢٥ + ٢٧ = ٥٢

ملاحظة هامة :

(١) لايجاد رتبة أول حد سالب فى متتابعة تناقصية نضع $ع_{ن}$ > ٠ ثم نحسب قيمة ن

(٢) لايجاد رتبة أول حد موجب فى متتابعة تزايدية نضع $ع_{ن}$ < ٠ ثم نحسب قيمة ن

(٣) لايجاد رتبة أول حد قيمته أكبر من (ك) نضع $ع_{ن}$ < ك ثم نحسب قيمة ن

(٤) لاثبات أن الحد قيمته (ك) نضع $ع_{ن}$ = ك ثم نحسب قيمة ن بشرط (ن ∈ ص⁺)

مثــــ٥ـــال: فى المتتابعة الحسابية (٩ ، ٥ ، ١ ، ...) (أولاً) أوجد رتبة الحد الذى قيمته ـ ٨٧ (ثانياً) هل يوجد حد قيمته ـ ٩٨ فى هذه المتتابعة ؟

الحـــــل

أ = ٩ ، ء = ٥ - ٩ = - ٤

(أولاً) ∵ $ح_{ن}$ = أ + (ن -١) ء ∴ $ح_{ن}$ = ٩ + (ن -١) × (- ٤)

∴ $ح_{ن}$ = ٩ ـ ٤ن +٤ = ـ ٤ن + ١٣

∴ - ٤ن + ١٣ = -٨٧ ∴ - ٤ن = ـ ١٠٠ ∴ ن = ٢٥ ∴ $ح_{٢٥}$ = ـ ٨٧

(ثانياً) ـ ٤ن +١٣= ـ ٩٨ ∴ -٤ن = ـ ١١١ ∴ ن = $\frac{١١١}{٤}$

∴ لايوجد حد قيمته ـ ٩٨ فى هذه المتتابعة

مثـــ٦ـــال: فى المتتابعة الحسابية (-٨٧، -٨٢، -٧٧، ... ، ٦٣) أوجد

(أولاً) عدد الحدود (ثانياً) ح١٠ من النهاية (ثالثاً) رتبة وقيمة أول حد موجب

الحـــــــــل

أ = -٨٧ ، ء = (-٨٢) – (-٨٧) = ٥ ، ل = ٦٣

(أولاً) ∵ حن = ل = أ + (ن -١) ء ∴ ٦٣ = -٨٧ + (ن -١) × ٥

∴ ٦٣ = -٨٧ + ٥ ن – ٥ ∴ ٦٣ + ٨٧ + ٥ = ٥ ن ∴ ن = ٣١

(ثانياً) ح١٠ من النهاية = ح٢٢ من البداية = أ + ٢١ء = -٨٧ + ١٠٥ = ١٨

حل آخر ح١٠ من النهاية = ل – ٩ء = ٦٣ – ٩×٥ = ٦٣ – ٤٥ = ١٨

(ثالثاً) حم = -٨٧ + (ن -١) × ٥ = -٨٧ + ٥ ن - ٥ = ٥ ن – ٩٢

حن > ٠ ∴ ٥ ن – ٩٢ > ٠ ∴ ن > ٩٢/٥ ∴ ن > ١٨.٤

∴ ن = ١٩ ∴ أول حد موجب هو ح١٩ = ٥×١٩ – ٩٢ = ٣

مثـــ٧ـــال: فى المتتابعة الحسابية (٦٢٠، ٦١٧ ، ٦١٤ ، ...) أوجد

(أولاً) رتبة وقيمة أول حد سالب (ثانياً) رتبة وقيمة أول حد أصغر من ٢٠٠

الحـــــــــل

أ = ٦٢٠ ، ء = ٦١٧ – ٦٢٠ = -٣

حن = أ + (ن -١) ء = ٦٢٠ + (ن – ١) × (-٣)

= ٦٢٠ - ٣ ن + ٣ = ٦٢٣ – ٣ ن

(أولاً) حن < ٠ ∴ ٦٢٣ – ٣ ن < ٠ ∴ -٣ ن < -٦٢٣

∴ ن > ٢٠٧.٧ ∴ ن = ٢٠٨

∴ أول حد سالب هو ح٢٠٨ = أ + ٢٠٧ء = ٦٢٠ + ٢٠٧ × (-٣) = -١

(ثانياً) حن < ٢٠٠ ∴ ٦٢٣ – ٣ ن < ٢٠٠ ∴ -٣ ن < -٤٢٣

∴ ن > ١٤١ ∴ ن = ١٤٢

∴ أول حد أصغر من ٢٠٠ هو ح١٤٢ = ٦٢٣ – ٣×١٤٢ = ١٩٧

مثــ٨ـــال: أوجد المتتابعة الحسابية (ع~ن~) التى فيها ع~٦~ = ١٨ ، ع~١٥~ = ٣٤

الحــــــــــــل

ع~٧~ = ٲ + ٦ء ∴ ٲ + ٦ء = ١٨ .... (١)

ع~١٥~ = ٲ + ١٤ء ∴ ٲ + ١٤ء = ٣٤ .... (٢)

بطرح (٢) من (١) ∴ ٨ ء = ١٦ ∴ د = ٢

من الأولى : ١٨= ٲ + ٦ × ٢ ∴ ٲ = ١٨ ـ ١٢ = ٦

∴ المتتابعة هى (٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ....)

استخدام الآلة الحاسبة:

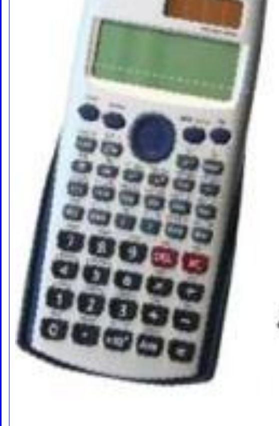
للتأكد من صحة حل المعادلتين: أ + ٦ئ = ١٨ ، أ + ١٤ئ = ٣٤

باستخدام الحاسبة العلمية نتبع الخطوات التالية:

إدخال البيانات

نضغط على مفتاح العمليات MODE ونختار من القائمة EQN وذلك بكتابة الرقم المكتوب أمامها أو بالضغط على المفتاح EXE فى بعض الآلات ثم نختار المعادلة الخطية anX + bnY = cn وذلك بالضغط على المفتاح

ندخل معاملات (X) ، (Y) ، والحد المطلق (cn) بالترتيب للمعادلة الأولى ثم للمعادلة الثانية مباشرة على النحو التالي:





مثــ٩ـــال: أوجد قيم س ، ص ، ع إذا كانت (٨ ، س ، ص ، ... ، ع ، ٦٨) متتابعة حسابية عدد حدودها ١٦ حداً .

الحــــــــــــل

∵ ٲ = ٨ ، ل = ٦٨ ، ن = ١٦

∵ ل = ٲ + (ن – ١) ء ∴ ٦٨ = ٨ + ١٥ء

∴ ١٥ء = ٦٠ ∴ ء = ٤ ∴ س = ٨ + ٤ = ١٢

، ص = ١٢ + ٤ = ١٦ ، ع = ٦٨ ـ ٤ = ٦٤

مثـــ١٠ــال: إذا كونت ٥ أعداد متتابعة حسابية وكان مجموع الأعداد ٤٥ ، وحاصل ضرب العدد الأول فى الخامس مضافاً إليه حاصل ضرب العدد الثانى فى الرابع يساوى ١١٧ فما هى الأعداد ؟

الحـــــــــل

نفرض أن الأعداد هى: م - ٢ء ، م - ء ، م ، م + ء ، م + ٢ء

∴ ٥ م = ٤٥ ∴ م = ٩ وتصبح الأعداد هى ٩-٢ء ، ٩-ء ، ٩ ، ٩+ ء ، ٩+ ٢ء

∴ (٩- ٢ء) (٩+ ٢ء) + (٩- ء) (٩+ ء) = ١١٧

∴ ٨١ - ٤ء^2 + ٨١ - ء^2 = ١١٧   ∴ - ٥ء^2 = - ٤٥

∴ ء^2 = ٩   ∴ ء = ± ٣

عندما ء = ٣   ∴ الأعداد هى ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥

وعندما ء = - ٣ ∴ الأعداد هى ١٥ ، ١٢ ، ٩ ، ٦ ، ٣ ويلاحظ أنهم نفس الأعداد

مثـــ١١ــال: أربعة أعداد مجموعها ٥٢ تكون متتابعة حسابية . أوجد الأعداد إذا كان مجموع مربعاتها ٧٥٦ .

الحـــــــــل

نفرض أن الأعداد هى م-٣ء ، م - ء ، م + ء ، م + ٣ء   ∴ ٤ م = ٥٢

∴ م = ١٣ وتصبح الأعداد هى ١٣ - ٣ء ، ١٣ - ء ، ١٣ + ء ، ١٣ + ٣ء

∴ (١٣ - ٣ء)^2 + (١٣ - ء)^2 + (١٣ + ء)^2 + (١٣ + ٣ء)^2 = ٧٥٦

∴ ١٦٩ - ٧٨ء + ٩ء^2 + ١٦٩ - ٢٦ء + ء^2 + ١٦٩ + ٢٦ء + ء^2 + ١٦٩ + ٧٨ء + ٩ء^2 = ٧٥٦

∴ ٢٠ء^2 = ٧٥٦ - ٦٧٦ = ٨٠   ∴ ء^2 = ٤   ∴ ء = ± ٢

عندما ء = ٢   ∴ الأعداد هى ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٩

وعندما ء = -٢   ∴ الأعداد هى ١٩ ، ١٥ ، ١١ ، ٧ وهى نفس الأعداد

الوســـــط الحســـــابى :

(١) إذا كونت ٢ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن

ب يسمى الوسط الحسابى بين ٢ ، جـ ويكون ٢ب = ٢ + جـ

(٢) إذا كونت (٢ ، س ، ص ، ... ، ع ، ل) متتابعة حسابية فإن

س ، ص ، ... ، ع تسمى أوساطاً حسابية بين ٢ ، ل ويكون

عدد الأوساط = عدد حدود المتتابعة ــ ٢

(٣) الوسط الأول = ح٢ = ٢ + ء ، الوسط الثانى = ح٣ = ٢ + ٢ء ، ...

الوسط الأخير = ل ــ ء ، الوسط قبل الأخير = ل ــ ٢ء

(٤) عدد الأوساط = عدد حدود المتتابعة ــ ٢

عدد الحدود = عدد الأوساط + ٢

مثـــ١ـــال: عددان وسطهما الحسابى ٩ وحاصل ضربهما ٧٧ . أوجد العددين

الحـــــــل

نفرض أن العددين هما س ، ص

∴ (س + ص) / ٢ = ٩ ∴ س + ص = ١٨ ∴ ص = ١٨ ــ س ... (١)

س ص = ٧٧ ... (٢) بالتعويض من (١) فى (٢)

∴ س (١٨ ــ س) = ٧٧ ∴ ١٨ س ــ س٢ = ٧٧

∴ س٢ ــ ١٨ س + ٧٧ = ٠ ∴ (س ــ ٧) (س ــ ١١) = ٠

إما س = ٧ وبالتعويض فى (١) ∴ ص = ١١

أ، س = ١١ وبالتعويض فى (١) ∴ ص = ٧ ∴ العددان هما ٧ ، ١١

ادخال عدد من الأوساط الحسابية بين الكميتين ٢ ، ل

(١) نوجد أساس المتتابعة (ء) من القانون ل = ٢ + (ن ــ ١) ء

(٢) تكون الأوساط هى ٢ + ء ، ٢ + ٢ء ، ٢ + ٣ء ، ٢ + ٤ء ، ....

ملاحظات : (١) إذا كان عدد الأوساط (ن) فإن الوسط الأخير هو $ع_{ن+١}$

(٢) إذا كان الحد الأخير هو (ل) فإن الوسط الأخير هو ل ـ ء

مثـــ٢ـــال: أدخل ١٢ وسطاً حسابياً بين ٦٤ ، ٢٥ ثم أوجد كل من الوسط الأول والوسط الأخير .

الحـــــــــــــل

∵ ٲ = ٦٤ ، ل = ٢٥ ، ن = ١٢ + ٢ = ١٤

∵ ل = ٲ + (ن – ١) ء ∴ ٢٥ = ٦٤ + ١٣ ء

∴ - ٣٩ = ١٣ ء ∴ ء = - ٣

∴ الأوساط هى ٦١ ، ٥٨ ، ٥٥ ، ... ، ٢٨

∴ الوسط الأول = ٦١ ، الوسط الأخير = ٢٨

> تذكر أن :
> الحد الثانى عشر من البداية هو $ع_{١٢}$ = ٲ + ١١ء
>
> بينما الوسط الثانى عشر هو = ٲ + ١٢ء

مثـــ٣ـــال: إذا أدخلنا عدة أوساطاً حسابية بين ٦ ، ٣٦ وكانت نسبة مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين تساوى ١:٣ فما عدد الأوساط ؟

الحـــــــــــــل

المتتابعة هي : (٦ ، ٦ + ء ، ٦ + ٢ ء ، ... ، ٣٦ – ٢ ء ، ٣٦ – ء ، ٣٦)

$$\therefore \frac{\text{٦ + ء + ٦ + ٢ء}}{\text{٣٦ – ٢ء + ٣٦ – ء}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}} \qquad \therefore \frac{\text{١٢ + ٣ء}}{\text{٧٢ – ٣ء}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}}$$

∴ ١٢ ء = ٣٦ ∴ ء = ٣

∵ ل = ٲ + (ن – ١) ء ∴ ٣٦ = ٦ + (ن – ١) × ٣

∴ ٣٦ = ٦ + ٣ ن – ٣ ∴ ٣ ن = ٣٣ ∴ ن = ١١ ∴ عدد الأوساط = ٩

مثـــ٤ـــال: إذا كانت س ، ص ، ع أوساطاً حسابية بين ٲ ، ل

فأثبت أن ل – س = ٣ (ع – ص)

الحـــــــــــــل

المتتابعة هى (ٲ ، س ، ص ، ع ، ل)

∴ س = ٲ + ء ، ص = ٲ + ٢ ء ، ع = ٲ + ٣ ء ، ل = ٲ + ٤ ء

الطرف الأيمن = (ٲ + ٤ ء) – (ٲ + ء) = ٣ ء

، الطرف الأيسر = ٣ (ٲ + ٣ ء – ٲ – ٢ ء) = ٣ ء ∴ الطرفان متساويان

تمارين على الحد العام لمتتابعة حسابية

أولا: إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه

(١) إذا كان ص هى الوسط الحسابى بين س ، ع فإن: س + ع = ...

(أ) ص (ب) ـ ص (جـ) ٢ص (د) $ص^{٢}$

(٢) إذا كان (٢٤ ، ب ، ٣٢) حدوداً متتالية من متتابعة حسابية فإن ب = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٢٧ (جـ) ٢٨ (د) ٣٠

(٣) فى المتتابعة (٣ ، ٦ ، ٩ ، ....) يكون $ع_{١٥}$ = ...

(أ) ٥٤ (ب) ٤٥ (جـ) ٣٦ (د) ٦٣

(٤) أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية (٩٨ ، ٩٤ ، ٩٠ ، ....) هو ....

(أ) $ع_{٢٤}$ (ب) $ع_{٢٥}$ (جـ) $ع_{٢٦}$ (د) $ع_{٢٧}$

(٥) فى أى متتابعة حسابية وسطها الثالث هو الحد ....

(أ) الثالث (ب) الرابع (جـ) الخامس (د) السادس

(٦) الحد العاشر من المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ....) هو ....

(أ) ١١ (ب) ١٢ (جـ) ٢١ (د) ٢٠

(٧) جميع المتتابعات الآتية حسابية ماعدا المتتابعة

(أ) (١٥،١١،٧،٣....) (ب) (ـ١١،ـ١٥،ـ١٩،..) (جـ) (١١،١٦،٢١....) (د) (٢،٤،٨.....)

(٨) إذا كان ($ع_{ن}$) متتابعة حسابية حيث $ع_{ن}$ = ٢ن + ٢ فإن الوسط الحسابى بين $ع_{٥}$ ، $ع_{١١}$

(أ) ٨ (ب) ١٦ (جـ) ٣٢ (د) ٣٦

(٩) المتتابعة الحسابية من بين المتتابعات الآتية هى............

(أ) $ع_{ن} = \frac{١}{٢} ن$ (ب) $ع_{ن} = (ن + ١)^{٢}$ (جـ) $ع_{ن} = \frac{١}{ن} + ٢$ (د) $ع_{ن} = ٢^{ن} + ١$

(١٠) إذا كان أ ، ب وسطين حسابيين بين س ، ص فإن: $\frac{ص - س}{ب - أ}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

(١١) إذا كان ٢م + ١ ، ٥م ـ ١ ، ٦م + ٣ ثلاث حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن م = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية

١) أثبت أن المتتابعة (٣٢، ٢٨، ٢٤، ٢٠، ....) متتابعة حسابية
ثم أوجد حدها النونى وكذا رتبة وقيمة أول حد سالب فيها

٢) أثبت أن المتتابعة (ــ ٥٩، ــ ٥٦، ــ ٥٣، ــ ٥٠، ....) متتابعة حسابية
ثم أوجد حدها النونى و رتبة وقيمة أول حد موجب فيها

٣) إثبت أن المتتابعة ($ح_ن$) = (٥ن ــ ٢) متتابعة حسابية ثم أوجد حدها التاسع

٤) إثبت أن المتتابعة ($ح_ن$) = (١ ــ ٣ ن) متتابعة حسابية ثم أوجد حدها العاشر

٥) متتابعة حسابية حدها الثالث = ١١، حدها السادس = ٢٣ أوجد المتتابعة و رتبة الحد
الذى قيمته = ٧٩

٦) متتابعة حسابية حدها السادس = ٣٦، حدها الرابع = ٤٦ أوجد المتتابعة ورتبة الحد
الذى قيمته = ــ ٩

٧) متتابعة حسابية فيها $ح_٢$ = ــ ٢٨ ، $ح_٣ + ح_٤$ = ــ ٤٤ أوجد المتتابعة

٨) متتابعة حسابية فيها $ح_٦$ = ١٢ ، $ح_٢ + ح_٤$ = ٤٢ أوجد المتتابعة

٩) أوجد عدد الحدود التى يجب أخذها من المتتابعة الحسابية (١، ٣، ٥، .....)
إبتداءاً من حدها الأول ليكون حدها الآخير يساوى ٣١٥

١٠) أقل عدد من الحدود يلزم أخذها من حدود المتتابعة الحسابية
(٣٥، ٣٠، ٢٥، ....) بدءا من حدها الأول ليكون حدها الأخير سالب

١١) إذا كانت (٢ ، ٢ ب ، .... ، ٢٠ ب ، ٨٦) متتابعة حسابية أوجد قيمة ب
ثم أوجد قيمة $ح_٥ + ح_٧$

١٢) إذا كانت (٣ ، ب ، .... ، ٥ ب ، ٣٩) متتابعة حسابية أوجد قيمة ب
ثم أوجد حدها العشرون

١٣) متتابعة حسابية حدها الخامس = ٢٠ ، مربع حدها الثانى = حاصل ضرب حديها
الأول والرابع أوجد رتبة وقيمة أول حد فيها أكبر من ١٠٦

١٤) متتابعة حسابية حدودها موجبة فيها $ح_١ + ح_٢ + ح_٣$ = ١٥، $ح_١ × ح_٣$ = ٢١
أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة أول حد أكبر من ٢٨٠

١٥) متتابعة حدودها موجبة النسبة بين حديها الرابع والسابع ٣: ٥ ومجموع مربعى
حديها الثانى والخامس ١٤٦ أوجد المتتابعة

مجموع (ن) من حدود متتابعة حسابية :

- $جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$ يستخدم القانون الأول إذا عُلم ن ، أ ، ل
- $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن - ١) ء]$ يستخدم القانون الثانى إذا عُلم ن ، أ ، ء

ملاحظات (١) إذا كان مجموع الحدود الموجبة فقط ⇐ $ع_ن >$ صفر
(٢) إذا كان المجموع أكبر مايمكن = مجموع الحدود الغير السالبة ⇐ $ع_ن \geqslant$ صفر
(٣) إذا طلب (ن) لكى يكون المجموع موجب ⇐ $حـ_ن >$ ٠
(٤) إذا طلب (ن) لكى يكون المجموع سالب ⇐ $حـ_ن <$ ٠

مثــ١ــال: أوجد $\sum_{ر=٥}^{٢٠} (٣٧ - ٣ ر)$

الحــــــل

عدد الحدود ن = ٢٠ - ر + ١ = ٢٠ - ٥ + ١ = ١٦ ، $حـ_ر = ٣٧ - ٣ ر$
∴ $حـ_٥ = ٣٧ - ٣ × ٥ = ١٢$ ، $حـ_{٢٠} = ٣٧ - ٣ × ٢٠ = -٢٣$
∵ $جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$ ∴ $جـ_{١٦} = ٨ (١٢ - ٢٣) = - ٨٨$

مثــ٢ــال: أوجد $\sum_{ر=٥}^{٢٤} (٤ ر - ٣)$

الحــــــل

عدد الحدود ن = ٢٤ - ر + ١ = ٢٤ - ٥ + ١ = ٢٠ ، $حـ_ر = ٤ ر - ٣$
∴ $حـ_٥ = ٤ × ٥ - ٣ = ١٧$ ، $حـ_{٢٠} = ٤ × ٢٤ - ٣ = ٩٣$
∵ $جـ_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$ ∴ $جـ_{١٦} = ١٠ (١٧ + ٩٣) = ١١٠٠$

مثــ٣ــال: أوجد $(حـ_ن) = (٢ ن + ١)$ ثم أوجد $\sum_{ر=١}^{٢٠} (٢ ر + ١)$

الحــــــل

$حـ_١ = ٢ × ١ + ١ = ٣$ ، $حـ_٢ = ٢ × ٢ + ١ = ٥$ ، $حـ_٣ = ٢ × ٣ + ١ = ٧$
∴ المتتابعة هى (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)
∵ $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن - ١) ء]$
∴ $جـ_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} [٢ × ٣ + (٢٠ - ١) × ٢] = ١٠ × (٦ + ٣٨) = ٤٤٠$

مثـــ٤ـــال: ($ح_ن$) متتابعة حسابية فيها $ح_٢$ = ١٣ ومجموع العشر حدود الأولى منها ٢٣٥ أوجد المتتابعة .

الحــــــــــل

$ح_٢$ = أ + ء = ١٣   ∴ أ = ١٣ – ء ... (١)

∵ $جـ_ن$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن – ١) ء]

∴ $جـ_{١٠}$ = ٥ [٢ أ + ٩ء] = ٢٣٥   ∴ ٢ أ + ٩ء = ٤٧ ... (٢)

نعوض من (١) فى (٢)   ∴ ٢٦ – ٢ء + ٩ء = ٤٧

∴ ٧ء = ٢١   ∴ ء = ٣

نعوض فى (١)   ∴ أ = ١٣ – ٣ = ١٠

∴ المتتابعة هى (١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ...)

مثـــ٥ـــال: أوجد ($ح_ن$) من المتتابعة الحسابية (٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، ...) ثم أوجد كم حداً يلزم أخذها من حدود هذه المتتابعة ابتداء من $ح_{١٥}$ ليكون المجموع مساوياً – ١٩٥

الحــــــــــل

∵ أ = ٢٥ ، ء = ٢١ – ٢٥ = -٤

$ح_{١٥}$ = أ + ١٤ء = ٢٥ + ١٤ × (-٤) = ٢٥ – ٥٦ = -٣١

∵ $جـ_ن$ = $\frac{ن}{٢}$[٢ أ + (ن – ١) ء]   " لاحظ أن الحد الأول هنا هو $ح_{١٥}$ "

∴ -١٩٥ = $\frac{ن}{٢}$[٢ × (-٣١) + (ن – ١) × (-٤)]

∴ -١٩٥ = $\frac{ن}{٢}$(-٦٢ – ٤ن + ٤) = $\frac{ن}{٢}$(-٤ن – ٥٨)

∴ -١٩٥ = -٢ن^٢ – ٢٩ن   ∴ ٢ن^٢ + ٢٩ن – ١٩٥ = ٠

∴ (٢ن + ٣٩) (ن – ٥) = ٠

إما ٢ن + ٣٩ = ٠ ومنها   ن = $\frac{-٣٩}{٢}$ وهو مرفوض

أ، ن – ٥ = ٠   ومنها   ن = ٥



مثـــــ٦ــــال: أوجد عدد الحدود التى يجب أخذها من المتتابعة الحسابية(١ ، ٣ ، ٥ ،...) ابتداء من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود مساوياً ٤٠٠

الحـــــــــــل

∵ ا = ١ ، ء = ٢ ، جـ$_{ن}$ = ٤٠٠ ، ن = ؟؟

∵ جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ا + (ن – ١) ء]

∴ ٤٠٠ = $\frac{ن}{٢}$[٢ + (ن – ١) × ٢] = $\frac{ن}{٢}$ (٢ + ٢ن – ٢)

= $\frac{ن}{٢}$ × ٢ن = ن^{٢} ∴ ن^{٢} = ٤٠٠ ∴ ن = ٢٠

مثـــ٧ــال: أوجد ح$_{ن}$ من المتتابعة الحسابية التى فيها جـ$_{ن}$ = ن^{٢} – ٢ن

الحـــــــــــل

نضع : ن = ١ فى جـ$_{ن}$

∴ جـ$_{١}$ = ١ – ٢ = - ١ ∴ ح$_{١}$ = - ١ ∴ ا = - ١

نضع ن = ٢ فى جـ$_{ن}$

∴ جـ$_{٢}$ = ٠ ∴ ح$_{١}$ + ح$_{٢}$ = ٠ ∴ - ١ + ح$_{٢}$ = ٠ ∴ ح$_{٢}$ = ١

∴ ء = ح$_{٢}$ – ح$_{١}$ = ١ – (- ١) = ٢

ح$_{ن}$ = ا + (ن – ١)ء = -١ + (ن – ١) × ٢ = -١ + ٢ن –٢ = ٢ن – ٣

مثـــ٨ــال: إذا كانت (ح$_{ن}$) متتابعة حسابية حيث جـ$_{ن}$ مجموع ن من حدودها الأولى وكان جـ$_{ن}$ × (٤ن + ٢) = جـ$_{٢ن}$ × (ن + ١) فأثبت أن ح$_{ن}$ = ن ح$_{١}$

الحـــــــــــل

نضع: ن = ١ ∴ جـ$_{١}$ × ٦ = جـ$_{٢}$ × ٢ بالقسمة على ٢

∴ ٣ ح$_{١}$ = ح$_{١}$ + ح$_{٢}$ ∴ ٣ا = ا + ا + ء ∴ ا = ء

∴ ح$_{ن}$ = ا + (ن – ١) ء = ا + (ن – ١) ا = ا + ن ا – ا = ن ا = ن ح$_{١}$

مثـــ٩ــال: متتابعة حسابية مجموع حدودها الثانى والرابع والسادس ٣٦ ومجموع العشر حدود الأولى منها ٩٠ . أوجد المتتابعة ثم أوجد أقل عدد من حدود هذه

المتتابعة يلزم أخذه ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع سالباً .

الحـــــــــــل

$ح_٢ + ح_٤ + ح_٦ = (أ + ء) + (أ + ٣ء) + (أ + ٥ء) = ٣٦$

$\therefore ٣أ + ٩ء = ٣٦ \quad \therefore أ + ٣ء = ١٢ \quad \therefore أ = ١٢ - ٣ء \ ...\ (١)$

$\because جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)ء] \quad \therefore ٩٠ = \frac{١٠}{٢}[٢أ + ٩ء]$

$\therefore ٢أ + ٩ء = ١٨ \ ...\ (٢)$

بالتعويض من (١) فى (٢)

$\therefore ٢٤ - ٦ء + ٩ء = ١٨ \quad \therefore ٣ء = -٦ \quad \therefore ء = -٢$

بالتعويض فى (١) $\therefore أ = ١٢ + ٦ = ١٨$

$\therefore$ المتتابعة هى (١٨ ، ١٦ ، ١٤ ، ...)

$جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢ \times ١٨ + (ن - ١) \times (-٢)] = \frac{ن}{٢}(٣٦ - ٢ن + ٢)$

$= \frac{ن}{٢}(٣٨ - ٢ن) < ٠ \quad \therefore ٣٨ - ٢ن < ٠ \quad \therefore ن > ١٩ \quad \therefore ن = ٢٠$

مثـــ١٠ـــال: كم حداً يلزم أخذها من حدود المتتابعة الحسابية (٣٣ ، ٢٩ ، ٢٥ ، ...) ابتداء من حدها الأول ليكون مجموعها أكبر ما يمكن وأوجد هذا المجموع .

الحـــــــــــل

$\because أ = ٣٣ \quad ، \quad ء = ٢٩ - ٣٣ = -٤$

يكون المجموع أكبر ما يمكن عندما نجمع الحدود غير السالبة

$ح_ن = أ + (ن - ١)ء = ٣٣ + (ن - ١) \times (-٤) = ٣٣ - ٤ن + ٤$

$ح_ن = ٣٧ - ٤ن > ٠ \quad \therefore -٤ن > -٣٧ \quad \therefore ن < ٩.٢٥ \quad \therefore ن = ٩$

$\because جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)ء]$

$\therefore جـ_ن = \frac{٩}{٢}[٢ \times ٣٣ + ٨ \times (-٤)] = \frac{٩}{٢} \times ٣٤ = ١٥٣$



مثـــ١١ـــال: أوجد مجموع الحدود الثمانية الأخيرة من المتتابعة الحسابية (١١ ، ١٤ ، ١٧ ، ... ، ٧١)

الحـــــــــل

نكتب المتتابعة من النهاية فتكون (٧١ ، ٦٨ ، ٦٥ ، ... ، ١١)

∴ أ = ٧١ ، ء = -٣ ، ن = ٨

∵ $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢ أ + (ن - ١) ء]$

∴ $جـ_ن = ٤ [٢ × ٧١ + ٧ × (-٣)] = ٤ (١٤٢ - ٢١) = ٤٨٤$

مثـــ١٢ـــال: المتتابعة الحسابية (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...) عدد حدودها زوجى ومجموع النصف الأول من حدودها أقل من مجموع بقية الحدود بمقدار ٤٠٠ . أوجد عدد حدودها .

الحـــــــــل

∴ أ = ٣ ، ء = ٤ ، نفرض أن عدد الحدود = ٢ ن

∵ مجموع المتتابعة = $جـ_{٢ن} = \frac{٢ن}{٢} [٢ أ + (٢ ن - ١) ء]$

$= ن [٦ + (٢ ن - ١) × ٤] = ن (٦ + ٨ ن - ٤) = ٨ ن^٢ + ٢ ن$

النصف الأول من الحدود يبدأ بـ $ح_١$ وينتهى بـ $ح_ن$ وعدد حدوده ن

∴ مجموع النصف الأول = $\frac{ن}{٢} (ح_١ + ح_ن) = \frac{ن}{٢} [أ + أ + (ن - ١) ء]$

$= \frac{ن}{٢} [٦ + (ن - ١) × ٤] = \frac{ن}{٢} (٦ + ٤ ن - ٤) = ٢ ن^٢ + ن$

مجموع باقى الحدود = مجموع المتتابعة ــ مجموع النصف الأول

$= (٨ ن^٢ + ٢ ن) - (٢ ن^٢ + ن) = ٦ ن^٢ + ن$

∴ $(٦ ن^٢ + ن) - (٢ ن^٢ + ن) = ٤٠٠$ ∴ $٤ ن^٢ = ٤٠٠$

∴ $ن^٢ = ١٠٠$ ∴ ن = ١٠ ∴ عدد الحدود = ٢٠ حداً

مثـــ١٣ـــال: متتابعة حسابية مجموع الستة حدود الأولى منها ١٥٩ ، ومجموع السبعة حدود التالية لها ٤٩ . أوجد هذه المتتابعة .

الحـــــــــــل

∵ $جـ_٦ = ١٥٩$ ، ∵ $جـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١) ء]$

∴ $١٥٩ = \frac{٦}{٢}(٢أ + ٥ء)$ ∴ $٢أ + ٥ء = ٥٣$ ... (١)

$جـ_{١٣} = ١٥٩ + ٤٩ = ٢٠٨$

∴ $٢٠٨ = \frac{١٣}{٢} (٢أ + ١٢ء)$ ∴ $٢أ + ١٢ء = ٣٢$ ... (٢)

بطرح (١) من (٢) ∴ $٧ء = -٢١$ ∴ $ء = -٣$

نعوض فى (١) ∴ $٢أ - ١٥ = ٥٣$ ∴ $٢أ = ٦٨$ ∴ $أ = ٣٤$

∴ المتتابعة هى (٣٤ ، ٣١ ، ٢٨ ، ...)

مثـــال ١٤: أوجد مجموع ٢٠ حداً الأولى من المتتابعة ($ح_ن$) حيث

$ح_ن = \begin{cases} ٢ن - ٤ & \text{، ن فردية} \\ ٣ن + ٢ & \text{، ن زوجية} \end{cases}$

الحـــــــــــل

المتتابعة الأولى :

$ح_ن = ٢ن - ٤$ عندما ن ∈ { ١ ، ٣ ، ٥ ، ... }

وهى (-٢ ، ٢ ، ٦ ، ...) وفيها أ = -٢ ، ء = ٤ ، ن = ١٠

مجموعها = $\frac{١٠}{٢}$ [٢ × -٢ + ٩ × ٤] = ١٦٠

المتتابعة الثانية :

$ح_ن = ٣ن + ٢$ عندما ن ∈ { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ... }

وهى (٨ ، ١٤ ، ٢٠ ، ...) وفيها أ = ٨ ، ء = ٦ ، ن = ١٠

مجموعها = $\frac{١٠}{٢}$ [٢ × ٨ + ٩ × ٦] = ٣٥٠

∴ مجموع العشرين حداً = ١٦٠ + ٣٥٠ = ٥١٠



مثـــ١٥ـــال: وضعت ٢٠ كرة على خط مستقيم بحيث كانت المسافة بين كل كرتين متتاليتين ٥ أمتار . أوجد المسافة التى يقطعها شخص ما يبدأ من موضع الكرة الأولى ليحضر هذه الكرات واحدة بعد الأخرى ويضعها فى صندوق عند موضع الكرة الأولى .

الحـــــــل

المسافة التى يقطعها الشخص لإحضار أول كرة = ٠ متراً

المسافة التى يقطعها الشخص لإحضار ثان كرة = ١٠ متراً

المسافة التى يقطعها الشخص لإحضار ثالث كرة = ٢٠ متراً

المسافة التى يقطعها الشخص لإحضار رابع كرة = ٣٠ متراً

∴ مجموع المسافات = ٠ + ١٠ + ٢٠ + ٣٠ + ٤٠ + ... إلى ٢٠ حداً

وهذه متتابعة حسابية فيها أ = ٠ ، ء = ١٠ ، ں = ٢٠

∴ مجموع المسافات = $\frac{٢٠}{٢}$ [٢ × ٠ + ١٩ × ١٠] = ١٩٠٠ متراً

مثـــ١٦ـــال: متتابعة حسابية حدها الأول = ١٢ ، حدها الأخير = ـ ٢٦ ومجموع حدودها = ـــ ١٤٠ . أوجد هذه المتتابعة.

الحـــــــل

∵ أ = ١٢ ، ل = ـ ٢٦ ، جـں = ـــ ١٤٠

∵ جـں = $\frac{ں}{٢}$ (أ + ل)

∴ ـ ١٤٠ = $\frac{ں}{٢}$ (١٢ – ٢٦) = ـ ٧ں ∴ ں = ٢٠

∵ ل = أ + (ں – ١) ء ∴ ـ ٢٦ = ١٢ + ١٩ء

∴ ـ ٣٨ = ١٩ء ∴ ء = ـ ٢

∴ المتتابعة هى (١٢ ، ١٠ ، ٨ ، ... ، ـ ٢٦)

تمارين على مجموع المتتابعة الحسابية

أولا: إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه

(١) قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{\text{ر}=١}^{٥} (٢\text{ر} + ١)$

(أ) ٢٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٣٥ (د) ٤٠

(٢) عدد الحدود اللازم أخذها من هذه المتتابعة (٢٧ ، ٢٤ ، ٢١ ، ...) ابتداء من حدها الأول ليكون المجموع مساوياً الصفر هو ....

(أ) ١٨ (ب) ١٩ (جـ) ٢٠ (د) ٢٢

(٣) مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٣٧ ، ٣٤ ، ٣١ ،...،-٨٠) يساوى ....

(أ) ٨٦٠ (ب) ـ ٨٦٠ (جـ) ٦٨٠ (د) ـ٦٨٠

(٤) $\text{ح}_{\text{ن}}$ من المتتابعة الحسابية $(\text{ح}_{\text{ن}}) = (٢\text{ن} - ٣)$ هو ....

(أ) $\text{ن}^٢ + ٢$ (ب) $\text{ن}^٢ - ٢\text{ن}$ (جـ) $\text{ن}^٢ + ٢\text{ن}$ (د) $\text{ن}^٢ - ٢$

(٥) مجموع الحدود الثمانية الأخيرة من المتتابعة الحسابية (١١ ، ١٤ ، ١٧ ، ... ، ٧١)

(أ) ٦٥٢ (ب) ٤٨٤ (جـ) ٢٦٠ (د) ١٣٠

(٦) قيمة المتسلسلة ٤ + ٩ + ١٤ + ... + ٥ن ـ ١ هى ....

(أ) $\sum_{\text{ر}=٤}^{\text{ن}} (٥\text{ر} - ١)$ (ب) $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (٥\text{ر} - ١)$ (جـ) $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} (٥\text{ر} + ١)$ (د) $\sum_{\text{ر}=١}^{٥\text{ن}} (٤\text{ر} - ٥)$

(٧) قيمة المتسلسلة ٧ + ١٢ + ١٧ + ٢٧ هى ....

(أ) $\sum_{\text{ر}=١}^{٤} (٥\text{ر} + ٢)$ (ب) $\sum_{\text{ر}=١}^{٤} (٤\text{ر} + ٣)$ (جـ) $\sum_{\text{ر}=١}^{٤} (٧\text{ر} + ١)$ (د) $\sum_{\text{ر}=١}^{٤} (٣\text{ر} + ١)$

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية

١) متتابعة حسابية فيها $\text{ح}_٢ = -٢٨$ ، $\text{ح}_٣ + \text{ح}_٤ = -٤٤$ أوجد المتتابعة ثم أوجد عدد الحدود اللازم أخذها بدءا من حدها الأول ليكون المجموع صفراً

٢) متتابعة حسابية فيها $ع_٦ = ١٢$ ، $ع_٢ + ع_٤ = ٤٢$ أوجد المتتابعة ثم أوجد عدد الحدود اللازم أخذها بدءا من حدها الأول ليكون المجموع صفر

٣) أوجد عدد الحدود التى يجب أخذها من المتتابعة الحسابية (١، ٣، ٥، ٠٠٠٠) إبتداءاً من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود مساويا ٤٠٠

٤) كم حدا يلزم أخذها من حدود المتتابعة الحسابية (٣٥، ٣٠، ٢٥، ٠٠٠٠) بدءا من حدها الأول ليكون المجموع مساويا ١٣٥ وفسر معنى الجوابين

٥) إذا كانت (٢ ، ٢ ب ، ٠٠٠٠٠٠٠٠٠ ، ٢٠ ب ، ٨٦) متتابعة حسابية أوجد قيمة ب ثم أوجد مجموع حدود هذه المتتابعة بدءا من حدها الثالث

٦) أوجد مجموع ٣٠ حدا من حدود المتتابعة الحسابية $(ع_ن) = (٢ن - ١)$ بدءاً من $ع_{١٥}$

٧) متتابعة حسابية حدها الأول = ١٢ ، حدها الأخير = - ٢٦ ، مجموع حدودها = - ١٤٠ أوجد المتتابعة

٨) متتابعة حسابية حدها الأول = ٢ ، مجموع العشرة حدود الأولى منها = ٣٣٥ أوجد المتتابعة

٩) أوجد مجموع الأعداد الطبيعية المحصورة بين ١٧ ، ١٧٠ والتى تقبل القسمة على ٧

١٠) إذا كان ١ + ٧ + ١٣ + ٠٠٠٠٠٠ + س = ٢٨٠ أوجد قيمة س

١١) مجموع الحدود الأربعة الأولى لمتتابعة حسابية ٥٦، مجموع الحدود الأربعة الأخيرة منها ١١٢ ، حدها الأول ١١ أوجد حدها الأخير وعدد حدودها

١٢) متتابعة حسابية مجموع ن حدا الأولى منها = $\frac{١}{٢}$ مجموع ن حدا التالية لها أوجد النسبة بين مجموع ٣ن حدا الأولى منها : مجموع ن حدا الأولى منها

١٣) متتابعة حسابية مجموع حدودها بدءا من حدها الثانى = − ٣٦ ، مجموع حدودها عدا حدها الأخير = ٠ ، الفرق بين حدها العاشر وحدها السادس = −١٦ أوجد المتتابعة

١٤) متتابعة حسابية عدد حدودها ٢ن حدا فيها $ع_{ن-١}$ = ٤٢ ، $ع_{٢ن}$ = ٧٨ ، مجموع ن حدا الأخيرة منها = ٦٠٠ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع ن حدا الأولى منها

١٥) متتابعة حسابية فيها $ع_١$ = − ٤ ، $ع_ن$ = ١١ ، $ع_{٢ن-١}$ = ٤٤ أوجد $ع_{٢ن-٣}$

١٦) إذا كان مجموع ن حدا الأولى من متتابعة يعطى بالقانون $حـ_ن$ = ٢ن (ن+٣) فإثبت أنها متتابعة حسابية وأوجد حدها العشرين ، مجموع العشرين حدا الأولى منها

١٧) إذا كان مجموع ن من حدود متتابعة يعطى بالعلاقة $حـ_ن$ = ٢$ن^٢$ إثبت أنها حسابية وأوجد حدها السابع

١٨) متتابعة حسابية فيها النسبة بين $حـ_ن$ الأولى منها : $حـ_{٢ن}$ الأولى منها = ٣ن − ١ : ١٢ن − ٢ ، مربع حدها الرابع ٤٠٠ أوجد مجموع العشرة حدود الأولى منها

١٩) إثبت أن ($ع_ن$) = (٤ن − ١) متتابعة حسابية وإذا كانت النسبة بين مجموع الثلث الأول من حدودها : مجموع باقى حدودها = ٧: ٥٤ أوجد عدد حدودها

٢٠) أوجد $حـ_٣$ حدا الأولى من المتتابعة الحسابية ($ع_ن$) = { ٣ن − ١ ، ن فردية ؛ ٢ن + ٢ ، ن زوجية }

٢١) متتابعة حسابية فيها $ع_٦$ = ١٦، $ع_{١٨}$ = − ٢٠ أوجد مجموع الحدود الموجبة منها

٢٢) إثبت أن ($ع_ن$) = (لو س $ص^{ن-١}$) متتابعة حسابية حيث س، ص ∈ $ح_+$ ، إذا كان س = ١٦٠ ، ص = $\frac{١}{٢}$ فإوجد مجموع التسعة حدود الأولى منها

المتتابعات الهندسية

الصورة العامة: (أ ، أ ر ، أ $ر^٢$ ، ... ، $\frac{ل}{ر^٢}$ ، $\frac{ل}{ر}$ ، ل)

مثـــ١ـــال : بين أى المتتابعات الآتية تكون متتابعة هندسية و أوجد اساسها

(١) $(ح_ن) = (٣ \times ٥^{ن-١})$ (٢) $(ح_ن) = (٣ + ٥^ن)$

الحـــــــل

(١) ∵ $ح_ن = ٣ \times ٥^{ن-١}$ ، $ح_{ن+١} = ٣ \times ٥^{(ن+١)-١} = ٣ \times ٥^ن$

∴ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٣ \times ٥^ن}{٣ \times ٥^{ن-١}} = ٥$ = مقدار ثابت

∴ $(ح_ن) = (٣ \times ٥^{ن-١})$ متتابعة هندسية أساسها ر = ٥

(٢) ∵ $ح_ن = ٣ + ٥^ن$ ، $ح_{ن+١} = ٣ + ٥^{ن+١}$

∴ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٣ + ٥^{ن+١}}{٣ + ٥^ن}$ ≠ مقدار ثابت

∴ $(ح_ن) = (٣ + ٥^ن)$ ليست متتابعة هندسية

الحد العام : $(ح_ن) = ل = أ ر^{ن-١}$

أساس المتتابعة الهندسية: $ر = \frac{ح_ن}{ح_{ن-١}}$ = $\frac{\text{أى حد}}{\text{الحد السابق له مباشرة}}$

مثـــ٢ـــال : فى المتتابعة الهندسية (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...) أوجد $ح_٦$ ، $ح_{١٠}$

الحـــــــل

أ = ٦ ، ر = ١٢ ÷ ٦ = ٢

$ح_٦ = أ ر^٥ = ٦ \times (٢)^٥ = ١٩٢$ ، $ح_{١٠} = أ ر^٩ = ٦ \times (٢)^٩ = ٣٠٧٢$

مثـــ٣ـــال : متتابعة هندسية حدها الثالث = ١٢ ، حدها الثامن = ٣٨٤ أوجد المتتابعة

الحـــــــل

∵ $ح_٣ = ١٢$ ∴ $أ ر^٢ = ١٢$ (١) ، ∵ $ح_٨ = ٣٨٤$

∴ أ $ر^٧$ = ٣٨٤ (٢)

∴ بالقسمة : $\frac{أ ر^٧}{أ ر^٢} = \frac{٣٨٤}{١٢}$ ∴ $ر^٥$ = ٣٢ = $٢^٥$ ∴ ر = ٢

بالتعويض فى (١) ∴ أ = ٣ ∴ المتتابعة هى (٣ ، ٦ ، ١٢ ، .....)

التمثيل البيانى للمتتابعة الهندسية :

مثـــال: أوجد الحدود الخمسة من المتتابعة

(٨ ، ٤ ، ٢ ، ......) ثم مثل ٧ حدود بيانياً

الحـــــل

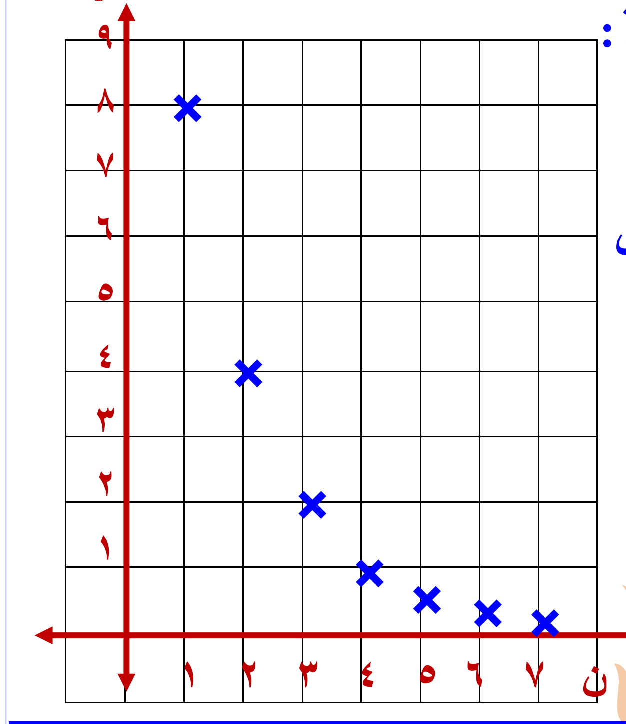
أساس المتتابعة = $\frac{٤}{٨} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

المجال هو {١،٢،٣،٤،٥،٦،٧}

المدى هو { ٨ ، ٤ ، ٢ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$ }

❖ حدود المتتابعة تناقصية أ > ٠ ، ٠ < ر < ١

❖ التمثيل البيان يتبع الدالة الأسية



مثـــال : متتابعة هندسية مجموع حديها الأول والثانى ٧٢ ، مجموع حديها الثالث والرابع ٨ أوجد المتتابعة

الحـــــل

∵ $ع_١ + ع_٢$ = ٧٢ ∴ أ + أ ر = ٧٢ ∴ أ (١ + ر) = ٧٢ (١)

، ∵ $ع_٣ + ع_٤$ = ٨ ∴ أ $ر^٢$ + أ $ر^٣$ = ٨ ∴ أ $ر^٢$ (١ + ر) = ٨ (٢)

بقسمة (٢) على (١) ينتج : $ر^٢ = \frac{١}{٩}$ ∴ ر = ± $\frac{١}{٣}$

بالتعويض فى (١) :

عند ر = $\frac{١}{٣}$ ∴ أ (١ + $\frac{١}{٣}$) = ٧٢ ، منها أ = ٥٤

∴ المتتابعة هى (٥٤ ، ١٨ ، ٦ ، .....)

عند ر = − $\frac{١}{٣}$ ∴ أ (١ − $\frac{١}{٣}$) = ٧٢ ، منها أ = ١٠٨

∴ المتتابعة هى (١٠٨ ، − ٣٦ ، ١٢ ، .....)

الوسط الهندسى

!) إذا كونت ٢ ، ب ، جـ متتابعة هندسية فإن ب تسمى الوسط الهندسى بين ٢ ، جـ

ويكون : $\frac{٢}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ ∴ ب^٢ = ٢ جـ ∴ ب = ± $\sqrt{٢ جـ}$

!!) إذا كونت (٢ ، ب ، جـ ، ... ، س ، ل) متتابعة هندسية

فإن ب ، جـ ، ... ، س تسمى أوساطاً هندسية بين ٢ ، ل

ويكون عدد الأوساط = عدد حدود المتتابعة ـ ٢

!!!) نظرية الوسط الحسابى لعددين حقيقيين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى .

فمثلاً : الوسط الهندسى للكميات ٢ ، ٤ ، ٩ ، ٣٦ ، ٣ ، ٦

= $\sqrt{٢ \times ٤ \times ٩ \times ٣٦ \times ٣ \times ٦}$ = ٦

مثـــ١ـــال: عددان موجبان وسطهما الحسابى = ١٠ ، وسطهما الهندسى = ٨ أوجد العددين

الحـــــــــــل

نفرض أن العددين هما س ، ص

∵ الوسط الحسابى = ١٠ ∴ $\frac{س + ص}{٢}$ = ١٠ ∴ س + ص = ٢٠ (١)

∵ الوسط الهندسى = ٨ ∴ $\sqrt{س ص}$ = ٨ ∴ س ص = ٦٤ (٢)

من (١) ينتج : ص = ٢٠ ــ س عوض فى (٢) ∴ س (٢٠ ــ س) = ٦٤

∴ س^٢ ــ ٢٠ س + ٦٤ = ٠ ∴ (س ــ ٤)(س ــ ١٦) = ٠

∴ س = ٤ أ؛ س = ١٦ ∴ ص = ١٦ أ؛ ص = ٤ ∴ العددان هما ٤ ، ١٦

مثـــ٢ـــال : إذا كانت س ــ ٢ ، ٢ س ــ ١ ، ٤ س + ٧ ثلاثة حدود من متتابعة هندسية فما قيمة س ؟

الحـــــــــــل

∵ س ــ ٢ ، ٢ س ــ ١ ، ٤ س + ٧ ثلاثة حدود من متتابعة هندسية

∴ ٢ س ــ ١ وسط هندسى بين س ــ ٢ ، ٤ س + ٧

∴ (٢ س ــ ١)^٢ = (س ــ ٢)(٤ س + ٧)

∴ ٤س^٢ ــ ٤س + ١ = ٤س^٢ ــ س ــ ١٤ ∴ ٣ س = ١٥ ∴ س = ٥

مثـــ٣ــال: إذا كانت س ، ص ، ع ، ل أربعة كميات موجبة متتالية من متتابعة هندسية

أثبت أن : س ص + س ل + ل ع > ٣ ص ع

الحـــــــــل

ص وسط هندسى بين س ، ع ، الوسط الحسابى بين س ، ع هو $\frac{\text{س} + \text{ع}}{٢}$

∴ $\frac{\text{س} + \text{ع}}{٢}$ > ص ∴ س + ع > ٢ ص (١)

، ع وسط هندسى بين ص ، ل ، الوسط الحسابى بين ص ، ل هو $\frac{\text{ص} + \text{ل}}{٢}$

∴ $\frac{\text{ص} + \text{ل}}{٢}$ > ع ∴ ص + ل > ٢ ع (٢)

بضرب (١) × (٢) ينتج : (س + ع)(ص + ل) > ٤ ص ع

∴ س ص + س ل + ص ع + ل ع > ٤ ص ع

∴ س ص + س ل + ل ع > ٣ ص ع

مثـــ٤ــال :أدخل ستة أوساط هندسية بين ١٣ ، ١٦٦٤

الحـــــــــل

∵ عدد الأوساط = ٦ ∴ عدد حدود المتتابعة = ٦ + ٢ = ٨

∴ أ = ١٣ ، $\text{ح}_{٨}$ = ١٦٦٤

، ∵ $\text{ح}_{٨} = \text{أ}\,\text{ر}^{٧}$ ∴ $١٣\,\text{ر}^{٧} = ١٦٦٤$ ∴ $\text{ر}^{٧} = ١٢٨ = ٢^{٧}$

∴ ر = ٢ ∴ الأوساط هى : ٢٦ ، ٥٢ ، ١٠٤ ، ٢٠٨ ، ٤١٦ ، ٨٣٢

مثـــ٥ــال : إذا أدخلت أربعة أوساط هندسية بين عددين وكان مجموع الوسطين الأول والرابع يساوى ٩٠ ، مجموع الوسطين الثانى والثالث يساوى ٦٠ أوجد العددين

الحـــــــــل

∵ عدد الأوساط = ٤ ∴ عدد حدود المتتابعة = ٤ + ٢ = ٨

، بفرض أن العدد الأول = أ ∴ العدد الثانى هو $\text{أ}\,\text{ر}^{٥}$

∴ الوسطين الأول والرابع هما $\text{ح}_{٢}$ ، $\text{ح}_{٥}$ ∴ $\text{ح}_{٢} + \text{ح}_{٥} = ٩٠$

∴ $\text{أ}\,\text{ر} + \text{أ}\,\text{ر}^{٤} = ٩٠$ ∴ $\text{أ}\,\text{ر}\,(١ + \text{ر}^{٣}) = ٩٠$ (١)

، الوسطين الثانى و الثالث هما $\text{ح}_{٣}$ ، $\text{ح}_{٤}$ ∴ $\text{ح}_{٣} + \text{ح}_{٤} = ٦٠$

∴ $\text{أ}\,\text{ر}^{٢} + \text{أ}\,\text{ر}^{٣} = ٦٠$ ∴ $\text{أ}\,\text{ر}^{٢}\,(١ + \text{ر}) = ٦٠$ (٢)

∴ بقسمة (١) على (٢) ينتج : $\frac{(١ + \text{ر})(١ - \text{ر} + \text{ر}^{٢})}{\text{ر}\,(١ + \text{ر})} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore$ ٢ $ر^{٢}$ − ٢ ر + ٢ = ٣ ر $\qquad$ $\therefore$ ٢ $ر^{٢}$ − ٥ ر + ٢ = ٠

$\therefore$ (ر − ٢) (٢ر − ١) = ٠ $\qquad$ $\therefore$ ر = ٢ أ، ر = $\frac{١}{٢}$

بالتعويض فى (٢) عن ر = ٢ $\qquad$ $\therefore$ أ = ٥ $\therefore$ العددان هما ٥ ، ١٦٠

، بالتعويض فى (٢) عن ر = $\frac{١}{٢}$ $\qquad$ $\therefore$ أ = ١٦٠ $\therefore$ العددان هما ١٦٠ ، ٥

مجموع المتسلسلة الهندسية

(!) $جـ_{ن} = \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١} = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$ ويستخدم إذا عُلم أ ، ر ، ن

(!!) $جـ_{ن} = \frac{ل ر - أ}{ر - ١} = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$ ويستخدم إذا عُلم أ ، ر ، ل

مثـــ١ـــال : أوجد مجموع الحدود الستة الأولى من المتتابعة الهندسية (٤ ، ١٢ ، ٣٦ ، .....)

الحـــــــــــل

أ = ٤ ، ر = $\frac{١٢}{٤}$ = ٣ ، ن = ٦

$\because$ $جـ_{ن} = \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$ $\quad$ $\therefore$ $جـ_{٦} = \frac{٤(٣^{٦} - ١)}{٣ - ١}$ = ١٤٥٦

مثـــ٢ـــال : متتابعة هندسية حدها الأول ٢ ، حدها الأخير ٢٥٦ ، مجموع حدودها ٥١٠ ، أوجد هذه المتتابعة

الحـــــــــــل

أ = ٢ ، ل = ٢٥٦ ، $جـ_{ن}$ = ٥١٠

$\because$ $جـ_{ن} = \frac{ل ر - أ}{ر - ١}$ $\quad$ $\therefore$ ٥١٠ = $\frac{٢٥٦ ر - ٢}{ر - ١}$

$\therefore$ ٥١٠ ر − ٥١٠ = ٢٥٦ ر − ٢ $\quad$ $\therefore$ ٥١٠ ر − ٢٥٦ ر = ٥١٠ − ٢

$\therefore$ ٢٥٤ ر = ٥٠٨ $\quad$ $\therefore$ ر = ٢

$\therefore$ المتتابعة هى (٢ ، ٤ ، ٨ ، .... ، ٢٥٦)

مثــ٣ـــال : كم حداً يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ، ......) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع ٢٠٤٦ ؟

الحـــــــــل

أ = ٢ ، ر = ٢ ، حـ ن = ٢٠٤٦

∵ $حـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ∴ $٢٠٤٦ = \frac{٢(٢^ن - ١)}{٢ - ١}$

∴ $١٠٢٣ = ٢^ن - ١$ ∴ $٢^ن = ١٠٢٤ = ٢^{١٠}$ ∴ ن = ١٠

مثــ٤ـــال : متتابعة هندسية حدودها موجبة ،حدها الثانى ٦ حدها الثالث يزيد عن حدها الأول بمقدار ٩ أوجد مجموع ١٢ حداً الأولى منها

الحـــــــــل

∵ $ع_٢ = ٦$ ∴ أ ر = ٦ (١)

، ∵ $ع_٣ - ع_١ = ٩$ ∴ $أ ر^٢ - أ = ٩$ ∴ $أ (ر^٢ - ١) = ٩$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) ينتج :

$\frac{ر^٢ - ١}{ر} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $٢ ر^٢ - ٢ = ٣ ر$

∴ $٢ ر^٢ - ٣ ر - ٢ = ٠$ ∴ $(ر - ٢) (٢ ر + ١) = ٠$

∴ ر = ٢ أو ر = $-\frac{١}{٢}$ مرفوض

بالتعويض فى (١) نجد أن : أ × ٢ = ٦ ∴ أ = ٣

∴ المتتابعة هى (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....)

لإيجاد مجموع ١٢ حداً الأولى منها

$حـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ∴ $حـ_{١٢} = \frac{٣(٢^{١٢} - ١)}{٢ - ١} = ١٢٢٨٥$

مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية

$حـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{\text{الحد الأول}}{١ - \text{الأساس}}$ حيث | ر | < ١

مثـــال ٥ : بين أى المتتابعات الهندسية الآتية يمكن إيجاد مجموع حدودها إلى ∞ ، أوجد هذا المجموع إن أمكن ؟

(١) (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...) (٢) (١ ، ٢ ، ٤ ، ...)

(٣) $(ح_ن) = (٢ \times ٣^{١ - ن})$ (٤) $(ح_ن) = (٢ \times (-٣)^{ن - ١})$

الحـــــــل

(١) $ر = \frac{٢٧}{٨١} = \frac{١}{٣}$ ، ∵ $|\frac{١}{٣}| < ١$ ∴ يمكن جمع حدود هذه المتتابعة إلى ∞

$$ح_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢٧}{١ - \frac{١}{٣}} = ٨١ \times \frac{٣}{٤} = ٦٠\frac{٣}{٤}$$

(٢) $ر = \frac{٢}{١} = ٢$ ، ∵ $|٢| > ١$ ∴ لا يمكن جمع حدود هذه المتتابعة إلى ∞

(٣) ∵ $ح_ن = ٢ \times ٣^{١ - ن}$ ∴ $ح_{ن+١} = ٢ \times ٣^{-ن}$

$$\therefore \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٢ \times ٣^{-ن}}{٢ \times ٣^{١-ن}} = ٣^{-ن-١+ن} = ٣^{-١} = \frac{١}{٣}$$

، ∵ $|\frac{١}{٣}| < ١$ ∴ يمكن جمع حدود هذه المتتابعة إلى ∞ ، يكون : $ح_١ = أ = ٢$

$$ح_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢}{١ - \frac{١}{٣}} = ٢ \times \frac{٣}{٢} = ٣$$

(٤) ∵ $ح_ن = ٢ \times (-٣)^{ن-١}$ ∴ $ح_{ن+١} = ٢ \times (-٣)^{ن}$

$$\therefore \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٢ \times (-٣)^{ن}}{٢ \times (-٣)^{ن-١}} = (-٣)^{ن-ن+١} = -٣$$

، ∵ $|-٣| > ١$ ∴ يمكن جمع حدود هذه المتتابعة إلى ∞

مثـــال ٦ : متتابعة هندسية فيها $ح_٢ = ٢٤٠$ ، $ح_٥ = ٣٠$ أوجد المتتابعة وأوجد مجموع عدد غير منتهٍ من حدودها

الحـــــــل

∵ $ح_٢ = ٢٤٠$ ∴ $أ ر = ٢٤٠$ (١) ، ∵ $ح_٥ = ٣٠$

∴ $أ ر^٤ = ٣٠$ (٢) بقسمة (٢) على (١) ينتج :

$\frac{أ ر^٤}{أ ر} = \frac{٣٠}{٢٤٠}$ ∴ $ر^٣ = \frac{١}{٨}$ ∴ $ر = \frac{١}{٢}$

بالتعويض فى (١) ينتج : $أ \times \frac{١}{٢} = ٢٤٠$ ∴ $أ = ٤٨٠$

∴ المتتابعة هى : (٤٨٠ ، ٢٤٠ ، ١٢٠ ، .....)

∴ $ح_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٤٨٠}{١ - \frac{١}{٢}} = ٩٦٠$

مثـــ٧ـــال متتابعة هندسية حدها الثالث يساوى ٩ وحدها السادس يساوى ٢٤٣
أوجد المتتابعة ومجموع الستة حدود الأولى منها .

الحـــــــل

$أ ر^٢ = ٩$ ... (١) ، $أ ر^٥ = ٢٤٣$ ... (٢)

بقسمة (٢) على (١) ∴ $ر^٣ = ٢٧$ ∴ $ر = ٣$

نعوض فى (١) ∴ $أ \times ٩ = ٩$ ∴ $أ = ١$

∴ المتتابعة هى (١ ، ٣ ، ٩ ، ...)

∵ $جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ∴ $جـ_٦ = \frac{١(٣^٦ - ١)}{٣ - ١} = \frac{٧٢٩ - ١}{٢} = ٣٦٤$

مثـــ٨ـــال: ($ح_ن$) متتابعة هندسية فيها $ح_٥ = ٨ ح_٢ ، ح_٤ + ح_٦ = ٢٤٠$
أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع الخمسة عشر حداً الأولى منها .

الحـــــــل

$أ ر^٤ = ٨ أ ر$ ∴ $ر^٣ = ٨$ ∴ $ر = ٢$

$أ ر^٣ + أ ر^٥ = ٢٤٠$ ∴ $٨ أ + ٣٢ أ = ٢٤٠$

∴ $٤٠ أ = ٢٤٠$ ∴ $أ = ٦$

∴ المتتابعة هى (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...)

∵ $جـ_ن = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ∴ $جـ_{١٥} = \frac{٦(٢^{١٥} - ١)}{٢ - ١} = ١٩٦٦٠٢$

مثـــ٩ـــال: متتابعة هندسية حدودها موجبة وحدها الثانى ٦ ، وحدها الثالث يزيد عن حدها الأول بمقدار ٩ . أوجد مجموع ١٢ حداً الأولى منها

الحـــــــــــل

$أ ر = ٦$ ... (١)

$أ ر^٢ - أ = ٩$ $\therefore$ $أ (ر^٢ - ١) = ٩$ ... (٢)

بقسمة (١) على (٢) $\therefore$ $\frac{ر}{ر^٢ - ١} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore$ $٢ ر^٢ - ٢ = ٣ ر$ $\therefore$ $٢ ر^٢ - ٣ ر - ٢ = ٠$

$\therefore$ $(٢ ر + ١) (ر - ٢) = ٠$

إما $ر = - \frac{١}{٢}$ وهو مرفوض لأن الحدود موجبة

أ، $ر = ٢$ نعوض فى (١) $\therefore$ $٢ أ = ٦$ $\therefore$ $أ = ٣$

$\because$ $جـ_ن = \frac{أ (ر^ن - ١)}{ر - ١}$ $\therefore$ $جـ_{١٢} = \frac{٣ (٢^{١٢} - ١)}{٢ - ١} = ١٢٢٨٥$

مثـــ١٠ـــال: كم حداً يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ، ...) ابتداء من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود مساوياً ٢٠٤٦ .

الحـــــــــــل

$\because$ $أ = ٢$ ، $ر = ٢$

$\because$ $جـ_ن = \frac{أ (ر^ن - ١)}{ر - ١}$ $\therefore$ $٢٠٤٦ = \frac{٢ (٢^ن - ١)}{٢ - ١}$

$\therefore$ $\frac{٢٠٤٦}{٢} = ٢^ن - ١$ $\therefore$ $١٠٢٣ = ٢^ن - ١$

$\therefore$ $٢^ن = ١٠٢٤ = ٢^ن$ $\therefore$ $ن = ١٠$

مثـــ١١ـــال: فى المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ... ، ١٢٢٨٨) أوجد(أولاً) رتبة الحد

الحـــــــــــل

$\because$ $أ = ٣$ ، $ر = ٢$ ، $ل = ١٢٢٨٨$

(أولاً) $\because$ $ح_ن = أ ر^{ن-١}$ $\therefore$ $٧٦٨ = ٣ \times ٢^{ن-١}$ بالقسمة على ٣

$\therefore$ $٢٥٦ = ٢^{ن-١}$ $\therefore$ $٢^٨ = ٢^{ن-١}$ $\therefore$ $ن - ١ = ٨$

∴ ن = ٩   ∴ $ح_{٩}$ = ٧٦٨

(ثانياً) ∵ ل = أ $ر^{ن-١}$ ∴ ١٢٢٨٨ = ٣ × $٢^{ن-١}$

∴ $٢^{ن-١} = \frac{١٢٢٨٨}{٣}$ = ٤٠٩٦ = $(٢)^{١٢}$ ∴ ن – ١ = ١٢

∴ ن = ١٣ وهو عدد الحدود

مثـــ١٢ـــال: مجموع الثلاثة حدود الأولى من متتابعة هندسية يساوى ٢٦ ومجموع الثلاثة حدود التالية لها يساوى ٧٠٢ . أوجد المتتابعة .

الحــــــــــل

∵ $ح_{١}$ + $ح_{٢}$ + $ح_{٣}$ = أ + أ ر + أ $ر^{٢}$ = ٢٦

∴ أ (١ + ر + $ر^{٢}$) = ٢٦ ... (١)

أ $ر^{٣}$ + أ $ر^{٤}$ + أ $ر^{٥}$ = ٧٠٢   ∴ أ $ر^{٣}$ (١ + ر + $ر^{٢}$) = ٧٠٢ ... (٢)

بقسمة (٢) على (١)   ∴ $ر^{٣}$ = ٢٧   ∴ ر = ٣

نعوض فى (١)   ∴ أ × (١ + ٣ + ٩) = ٢٦

∴ ١٣ أ = ٢٦   ∴ أ = ٢

∴ المتتابعة هى (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ...)

مثـــ١٣ـــال: ($ح_{ن}$) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فإذا كان $ح_{٣}$ + $ح_{٤}$ = ٦ $ح_{٢}$ ، $ح_{٧}$ = ٣٢٠ . أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى .

الحــــــــــل

∵ $ح_{٣}$ + $ح_{٤}$ = ٦ $ح_{٢}$ ∴ أ $ر^{٢}$ + أ $ر^{٣}$ = ٦ ر أ   بالقسمة على ر أ

∴ ر + $ر^{٢}$ = ٦   ∴ $ر^{٢}$ + ر – ٦ = ٠   ∴ (ر + ٣) (ر – ٢) = ٠

إما   ر + ٣ = ٠   ومنها   ر = -٣   وهذا مرفوض

أ، ر – ٢ = ٠   ومنها   ر = ٢

∵ $ح_{٧}$ = أ $ر^{٦}$ = ٣٢٠   ∴ ٦٤ أ = ٣٢٠   ∴ أ = ٥

∴ المتتابعة هى (٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ...)

∵ $جـ_{ن} = \frac{أ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$ ∴ $جـ_{٨} = \frac{٥ (٢^{٨} - ١)}{٢ - ١}$ = ١٢٧٥

مثــ١٤ــال: متتابعة هندسية فيها أ = ٣ ، ل = ٣٠٧٢ ، حدها الرابع من النهاية يساوى ــ ٣٨٤ . أوجد مجموع حدود هذه المتتابعة .

الحــــــــل

$\frac{\text{ل}}{\text{ر}^{3}} = -384$ ∴ $\text{ل} = -384\,\text{ر}^{3}$ ∴ $3072 = -384\,\text{ر}^{3}$

∴ $\text{ر}^{3} = -8$ ∴ $\text{ر} = -2$

∴ $\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ} - \text{ل}\,\text{ر}}{1 - \text{ر}} = \frac{3 - 3072 \times (-2)}{1 - (-2)} = \frac{6147}{3} = 2049$

مثــ١٥ــال: متتابعة هندسية فيها $\text{ح}_{\text{ن}} = 2 \times 3^{\text{ن} - 1}$ أوجد مجموع الستة حدود الأولى منها .

الحــــــــل

نضع ن = ١ ∴ $\text{ح}_{1} = 2 \times 3^{\text{صفر}} = 2 \times 1 = 2$

نضع ن = ٢ ∴ $\text{ح}_{2} = 2 \times 3^{1} = 6$

∴ أ = ٢ ، $\text{ر} = \frac{6}{2} = 3$

∴ $\text{جـ}_{6} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - 1)}{\text{ر} - 1} = \frac{2(3^{6} - 1)}{3 - 1} = 728$

مثــ١٦ــال : متتابعة هندسية فيها $\text{ح}_{2} = 5$ ، $\frac{\text{ح}_{7}}{\text{ح}_{4}} = \frac{1}{27}$ أوجد المتتابعة ، وبين أنه يمكن جمع عدد غير منته من حدودها ثم أوجد هذا المجموع .

الحــــــــل

∵ $\text{ح}_{2} = \text{أ}\,\text{ر} = 5$ ... (١) ، ∵ $\frac{\text{ح}_{7}}{\text{ح}_{4}} = \frac{\text{أ}\,\text{ر}^{6}}{\text{أ}\,\text{ر}^{3}} = \text{ر}^{3} = \frac{1}{27}$

∴ $\text{ر} = \frac{1}{3}$ نعوض فى (١)

∴ $\text{أ} \times \frac{1}{3} = 5$ ∴ أ = ١٥

∴ المتتابعة هى (١٥ ، ٥ ، $\frac{5}{3}$ ، ...)

∵ $|\text{ر}| < 1$ ∴ يمكن جمع عدد غير منته من حدود المتتابعة

$\text{جـ}_{\infty} = \frac{\text{أ}}{1 - \text{ر}} = \frac{15}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{15}{\frac{2}{3}} = 15 \times \frac{3}{2} = \frac{45}{2}$

مثـــال١٧: مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية يساوى ٤ وحدها الثانى يساوى – ٣ أوجد المتتابعة .

الحـــــــــل

∵ $\text{ج}_{\infty} = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}} = ٤$ ... (١)

∵ $\text{ح}_{٢} = \text{ر أ} = -٣$ ... (٢) بقسمة (٢) على (١)

∴ $\text{ر أ} \times \frac{١ - \text{ر}}{\text{أ}} = \frac{-٣}{٤}$ ∴ $\text{ر} - \text{ر}^{٢} = \frac{-٣}{٤}$

∴ $٤\text{ر} - ٤\text{ر}^{٢} = -٣$ ∴ $٤\text{ر}^{٢} - ٤\text{ر} - ٣ = ٠$

∴ $(٢\text{ر} + ١)(٢\text{ر} - ٣) = ٠$

إما $٢\text{ر} - ٣ = ٠$ ومنها $\text{ر} = \frac{٣}{٢}$ وهذا مرفوض لأن $|\text{ر}| > ١$

أ، $٢\text{ر} + ١ = ٠$ ومنها $\text{ر} = \frac{-١}{٢}$

نعوض فى (٢) ∴ $\frac{-١}{٢}\text{أ} = -٣$ ∴ $\text{أ} = ٦$

∴ المتتابعة هى (٦ ، -٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ...)

مثـــال١٨: إذا كان مجموع حدود متتابعة هندسية لانهائية ١٥ ومجموع مربعات هذه الحدود ٤٥ فما هى المتتابعة ؟

الحـــــــــل

المتتابعة هى (أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، ...) ∴ $\text{ج}_{\infty} = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}} = ١٥$ ... (١)

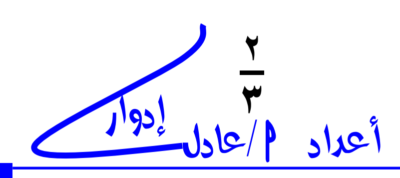
المتتابعة التى حدودها مربعات حدود المتتابعة السابقة (أ^{٢} ، أ^{٢} ر^{٢} ، أ^{٢} ر^{٤}, ...)

∴ $\text{ج}_{\infty} = \frac{\text{أ}^{٢}}{١ - \text{ر}^{٢}} = ٤٥$ ... (٢) بتربيع (١) وقسمتها على (٢)

∴ $\frac{\text{أ}^{٢}}{(١ - \text{ر})^{٢}} \times \frac{١ - \text{ر}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} = \frac{٢٢٥}{٤٥}$

∴ $\frac{(١ - \text{ر})(١ + \text{ر})}{(١ - \text{ر})^{٢}} = \frac{١ + \text{ر}}{١ - \text{ر}} = ٥$

$\frac{٢}{٣}$



∴ ١ + ر = ٥ ـ ٥ ر ∴ ٦ ر = ٤ ∴ ر =

نعوض فى (١) ∴ أ = ١٥ (١ - $\frac{٢}{٣}$) = ٥

∴ المتتابعة هى (٥ ، $\frac{١٠}{٣}$ ، $\frac{٢٠}{٩}$ ، ...)

مثـــ١٩ـــال: أدخل ٥ أوساط هندسية بين ٣ ، ١٩٢

الحـــــــــل

∵ أ = ٣ ، ل = ١٩٢ ، ن = ٧

∵ ل = أ ر$^{ن-١}$ ∴ ١٩٢ = ٣ ر^{٦} ∴ ر^{٦} = ٦٤

∴ ر^{٦} = (± ٢)^{٦} ∴ ر = ± ٢

عندما ر = ٢ ∴ الأوساط هى (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ٩٦)

وعندما ر = ـ ٢ ∴ الأوساط هى (ـ ٦ ، ١٢ ، ـ ٢٤ ، ٤٨ ، ـ ٩٦)

∴ الأوساط هى (± ٦ ، ١٢ ، ± ٢٤ ، ٤٨ ، ± ٩٦)

مثـــ٢٠ـــال: إذا أدخلنا عدة أوساط هندسية بين ٣ ، ٣٨٤ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين هى ١ : ١٦ فما عدد تلك الأوساط ؟

الحـــــــــل

∴ المتتابعة هى (٣ ، ٣ر ، ٣ر^{٢} ، ... ، $\frac{٣٨٤}{ر^{٢}}$ ، $\frac{٣٨٤}{ر}$ ، ٣٨٤)

∴ $\frac{٣ر + ٣ر^{٢}}{\frac{٣٨٤}{ر^{٢}} + \frac{٣٨٤}{ر}}$ = $\frac{١}{١٦}$ بالضرب × ر^{٢} بسطاً ومقاماً

∴ $\frac{٣ر^{٣} + ر^{٤}}{٣٨٤ + ٣٨٤ر}$ = $\frac{٣ر^{٣} (١+ ر)}{٣٨٤(ر + ١)}$ = $\frac{ر^{٣}}{١٢٨}$ = $\frac{١}{١٦}$

∴ ١٦ر^{٣} = ١٢٨ ∴ ر^{٣} = ٨ ∴ ر = ٢

∵ ل = أ ر$^{ن-١}$ ∴ ٣٨٤ = ٣ × ٢$^{ن-١}$ ∴ ٢$^{ن-١}$ = ١٢٨

∴ ٢$^{ن-١}$ = (٢)^{٧} ∴ ن ـ ١ = ٧ ∴ ن = ٨ ∴ عدد الأوساط = ٦

مثـــ٢١ـــال: إذا كانت ٢س ، ٤ص ، ٣ع ، ٣ل كميات موجبة فى تتابع حسابى

فأثبت أن ٨ ص^{٢} + ٣ع^{٢} > ٣س ع + ٤ ص ل

الحـــــــــــل

∵ ٢س ، ٤ ص ، ٣ع فى تتابع حسابى

∵ الوسط الحسابى > الوسط الهندسى ∴ ٤ص > $\sqrt{٦س ع}$

∴ ١٦ ص^{٢} > ٦ س ع ∴ ٨ص^{٢} > ٣ س ع ... (١)

∵ ٤ص ، ٣ع ، ٣ل فى تتابع حسابى

∵ الوسط الحسابى > الوسط الهندسى ∴ ٣ع > $\sqrt{١٢ص ل}$

∴ ٩ع^{٢} > ١٢ ص ل ∴ ٣ع^{٢} > ٤ص ل ... (٢)

بجمع (١) ، (٢) ∴ ٨ ص^{٢} + ٣ع^{٢} > ٣س ع + ٤ ص ل

مثـــ٢٢ـــال: متتابعة هندسية متزايدة جميع حدودها موجبة ، إذا كان الوسط الحسابى لحديها الثانى والرابع يساوى ٦٨ والوسط الهندسى الموجب لهما يساوى ٣٢ أوجد المتتابعة .

الحـــــــــــل

الوسط الحسابى = $\frac{أ ر + أ ر^{٣}}{٢}$ = ٦٨ ∴ أ ر (١ + ر^{٢}) = ١٣٦ ... (١)

الوسط الهندسى = $\sqrt{أ ر \times أ ر^{٣}}$ = ٣٢ ∴ أ ر^{٢} = ٣٢ ... (٢)

بقسمة (١) على (٢)

$\frac{أ ر (١ + ر^{٢})}{أ ر^{٢}}$ = $\frac{١ + ر^{٢}}{ر}$ = $\frac{١٧}{٤}$ ∴ ٤ ر^{٢} + ٤ = ١٧ ر

∴ ٤ ر^{٢} – ١٧ر + ٤ = ٠ ∴ (٤ر – ١) (ر – ٤) = ٠

إما ٤ ر – ١ = ٠ ومنها ر = $\frac{١}{٤}$ " مرفوض لأن المتتابعة متزايدة "

أ، ر – ٤ = ٠ ومنها ر = ٤ نعوض فى (٢) ∴ ١٦ أ = ٣٢

∴ أ = ٢ ∴ المتتابعة هى (٢ ، ٨ ، ٣٢ ، ...)

مثــ٢٣ــال: متتابعة حسابية مجموع الخمسة حدود الأولى منها ٤٥ وحدودها الأول والثانى والرابع فى تتابع هندسي ، أوجد المتتابعة الحسابية .

الحـــــــل

∵ جـن = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن – ١) ء]

∴ جـ٥ = $\frac{٥}{٢}$ (٢أ + ٤ء) = ٤٥ ∴ $\frac{٥}{٢}$ × ٢ (أ + ٢ء) = ٤٥

∴ أ + ٢ء = ٩ ... (١)

∵ ح١ ، ح٢ ، ح٤ فى تتابع هندسى أ ، أ + ء ، أ + ٣ء

∴ (أ + ء)^{٢} = أ (أ + ٣ء)

∴ أ^{٢} + ٢ أء + ء^{٢} = أ^{٢} + ٣ أء ∴ ء^{٢} – أء = ٠ بالقسمة على ء

∴ ء – أ = ٠ ∴ ء = أ ... (٢)

نعوض من (٢) فى (١) ∴ أ + ٢ أ = ٩ ∴ ٣ أ = ٩

∴ أ = ٣ ، ء = ٣ ∴ المتتابعة الحسابية هى (٣ ، ٦ ، ٩ ، ...)

مثــ٢٤ــال: ثلاثة أعداد موجبة فى تتابع حسابى مجموعها ١٥ وإذا ضُرب أصغرها فى ٢ وأضيف للأوسط ٧ وأضيف للأكبر ١٧ كونت الأعداد الناتجة متتابعة هندسية أوجد حدود المتتابعة الحسابية .

الحـــــــل

نفرض أن الأعداد هى أ – ء ، أ ، أ + ء

∵ ٣ أ = ١٥ ∴ أ = ٥ ∴ الأعداد هى ٥ – ء ، ٥ ، ٥ + ء

إذا ضُرب أصغرها فى ٢ وأضيف للأوسط ٧ وأضيف للأكبر ١٧

∴ ١٠ – ٢ء ، ١٢ ، ٢٢ + ء فى تتابع هندسى

∴ ١٤٤ = (١٠ – ٢ء) (٢٢ + ء) = ٢٢٠ – ٣٤ ء – ٢ ء^{٢}

∴ ٢ء^{٢} + ٣٤ء – ٧٦ = ٠ ∴ ء^{٢} + ١٧ء – ٣٨ = ٠

∴ (ء + ١٩) (ء – ٢) = ٠

إما ء = – ١٩ وهذا مرفوض لأن الأعداد موجبة

أ، ء = ٢ ∴ المتتابعة الحسابية هى (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)

الكسر العشرى الدائرى

لتحويل الكسر الإعتيادى $\frac{١}{٣}$ إلى كسر عشرى نجرى عملية القسمة ونلاحظ :

أن عملية القسمة لا تنتهى و أن الرقم ٣ فى خارج القسمة يظل متكرراً أى أن :

$\frac{١}{٣}$ = ٠,٣٣٣٠٠٠٠ لذا نختصر هذا الناتج بأن نكتب :

$\frac{١}{٣}$ = ٠.٣̇ وذلك بوضع نقطة فوق العدد ٣ الذى يتكرر وتقرأ ٠.٣ دائر

بالمثل : $\frac{١}{٦}$ = ٠,١٦٦٦٦٠٠٠٠ = ٠.١٦̇ ، $\frac{٥}{٩}$ = ٠,٥٥٥٥٠٠٠٠٠ = ٠.٥̇

$\frac{٥}{٣٣}$ = ٠.١٥١٥٠٠٠٠٠ = ٠.١̇٥̇ ، $\frac{١٣٤}{٩٩٩}$ = ٠,١٣٤١٣٤٠٠٠٠٠ = ٠.١̇٣٤̇

ويلاحظ : أن وضع النقط فوق الرقم معناه إستمرار تكرار هذا الرقم أى أن هذا الرقم دائر

، إذا كانت النقط على رقمين متتالين فمعناه أن إستمرار تكرار هذين الرقمين أى

أنهما دائرين، إذا كانت النقط على رقمين ويحصران بينهما رقم ثالث فمعناه أن

إستمرار تكرار الأرقام الثلاثة

و إذا كان العكس هو المطلوب أى تحويل الكسر العشرى الدائر إلى كسر إعتيادى

فإننا نضع الكسر العشرى الدائر فى صورة مجموع حدود متتابعة هندسية غير

منتهية كالآتى : ٠.٣̇ = ٠,٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣٣

= ٠.٣ + ٠.٠٣ + ٠.٠٠٣ + ٠.٠٠٠٣ + ٠٠٠٠

٠.١٧̇ = ٠,١٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧٧

= ٠.١ + (٠.٠٧ + ٠.٠٠٧ + ٠.٠٠٠٠٧ + ٠٠٠٠)

٠.٨̇٦̇ = ٠,٨٦٨٦٨٦٨٦٨٦٨٦٨٦٨٦٨٦٨٦٨٦٨٦

= ٠.٨٦ + ٠.٠٠٨٦ + ٠.٠٠٠٠٠٠٨٦ + ٠٠٠٠٠

٠.٤̇١٥̇ = ٠,٤١٥٤١٥٤١٥٤١٥٤١٥٤١٥٤١٥٤١٥

= ٠.٤١٥ + ٠.٠٠٠٤١٥ + ٠.٠٠٠٠٠٠٠٠٤١٥ + ٠٠٠٠٠

مثـــ٤١ـــال: حول الكسور العشرية الدائرية الآتية إلى كسور اعتيادية فى أبسط صورة

(أولاً) $٠.\dot{٧}$ (ثانياً) $٠.\dot{٤}\dot{٨}$ (ثالثاً) $٠.\dot{٤}٧\dot{١}$ (رابعاً) $٢.٥\dot{٤}\dot{٣}$

الحـــــــــــل

(أولاً) $٠.\dot{٧} = ٠,٧٧٧٧٧٧٧٧٧$

$= ٠,٧ + ٠,٠٧ + ٠,٠٠٧ + \ldots$ م. هـ إلى ∞

أ = ٠.٧ ، ر = ٠,١ $جـ = \frac{٠,٧}{١ - ٠,١} = \frac{٠,٧}{٠,٩} = \frac{٧}{٩}$

(ثانياً) $٠.\dot{٤}\dot{٨} = ٠,٤٨٤٨٤٨٤٨٤٨٠٠٠$

$= ٠.٤٨ + ٠,٠٠٤٨ + ٠,٠٠٠٠٤٨ + \ldots$ م. هـ إلى ∞

أ = ٠.٤٨ ، ر = ٠,٠١ $\therefore جـ = \frac{٠,٤٨}{١ - ٠,٠١} = \frac{٠,٤٨}{٠,٩٩} = \frac{٤٨}{٩٩} = \frac{١٦}{٣٣}$

(ثالثاً) $٠.\dot{٤}٧\dot{١} = ٠,٤٧١٤٧١٤٧١٠٠٠$

$= ٠.٤٧١ + ٠,٠٠٠٤٧١ + ٠,٠٠٠٠٠٠٤٧١ + \ldots$ م. هـ إلى ∞

أ = ٠,٤٧١ ، ر = ٠,٠٠١ $\therefore جـ = \frac{٠,٤٧١}{١ - ٠,٠٠١} = \frac{٠,٤٧١}{٠,٩٩٩} = \frac{١٥٧}{٣٣٣}$

(رابعاً) $٢.٥\dot{٤}\dot{٣} = ٢,٥٤٣٤٣٤٣٤٣٠٠٠$

$= ٢,٥ + ٠,٠٤٣ + ٠,٠٠٠٤٣ + ٠,٠٠٠٠٠٤٣ + \ldots$ م. هـ إلى ∞

أ = ٠,٠٤٣ ، ر = ٠,٠١ $\therefore جـ = ٢,٥ + \frac{٠,٠٤٣}{١ - ٠,٠١} = ٢,٥ + \frac{٠,٠٤٣}{٠,٩٩}$

$= \frac{٥}{٢} + \frac{٤٣}{٩٩} = \frac{١٢٥٩}{٤٩٥}$

تمارين على المتتابعة الهندسية

أولا: إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه

(١) فى المتتابعة (س ، س ص ، س $ص^٢$ ، ...) حيث | ص | < ١ فإن $جـ_\infty$ = ...

(أ) $\frac{س}{١ - ص}$ (ب) $\frac{ص}{١ - س}$ (جـ) $\frac{س}{ص + ١}$ (د) $\frac{س}{ص - ١}$

(٢) متتابعة هندسية ٥ $ع_٤$ - ٧ $ع_٥$ = صفر فإن أساسها = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) $\frac{٧}{٥}$ (د) $\frac{٥}{٧}$

(٣) $جـ_\infty$ من المتتابعة (١٦ ، ٨ ، ٤ ، ....) = ...

(أ) ٨ (ب) ١٦ (جـ) ٣٢ (د) -١٦

(٤) متتابعة هندسية فيها أ = ٣ ، ر = ٢ فإن حدها الخامس = ...

(أ) ٤٨ (ب) ١٦٢ (جـ) ٩٦ (د) ١٢٨

(٥) المتتابعة ($ع_ن$) = ... هندسية

(أ) ٥ن + ٣ (ب) $(٥)^٣$ + ن (جـ) ٥ + $٣^ن$ (د) ٥ + $ن^٣$

(٦) مجموع عدد غير منتهه من حدود المتتابعة (٨ ، ٤ ، ٢ ، ....)

(أ) ١٦ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٤ (د) ٣٠

(٧) إذا كان مجموع عدد غير منتهه من حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ١٢ هو ٩٦ فإن أساسها يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٧}{٨}$

(٨) إذا كان مجموع عدد غير منتهه من حدود متتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٢}$ هو $١٣\frac{١}{٢}$ فإن حدها الأول يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٩) متتابعة هندسية مجموع ن جداً الأولى منها يعطى بالعلاقة $ح_ن = (٢)^{ن+١} - ٤$ فإن الحد الثالث منها يساوى ....

(أ) ١٨ (ب) ٢٣ (جـ) ٥٤ (د) ٧٧

(١٠) متتابعة هندسية حدها الأول يساوى مجموع الحدود التالية لإلى مالانهاية فإن ر=..

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٣٣٣ (جـ) ٠,٢٥ (د) ٠,٦٦٦

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية

١) إثبت أن المتتابعة $(ع_ن)$ = (٢ ن – ١) متتابعة هندسية ثم أوجد حدها العاشر

٢) إثبت أن المتتابعة $(ع_ن)$ حيث $ع_{ن+١} = \frac{١}{٢} ع_ن$ متتابعة هندسية ثم أوجد حدها الخامس حيث $ع_١ = ٣$

٣)إثبت أن المتتابعة $(ع_ن)$ = (١، ٣، ٩، ٢٧، ...) متتابعة هندسية ثم أوجد حدها السادس

٤) إثبت أن المتتابعة $(ع_ن)$ = (٢ ، – ٤ ، ٨ ، – ١٦، ...) متتابعة هندسية ثم أوجد حدها السابع

٥) متتابعة هندسية فيها $ع_٢ = ٦$، $ع_٥ = ١٦٢$ أوجد المتتابعة ، رتبة الحد الذى قيمته ١٤٥٨ ، مجموع الستة حدود الأولى منها

٦) متتابعة هندسية فيها $ع_٣ = ٩$، $ع_٦ = ٢٤٣$ أوجد المتتابعة ، رتبة الحد الذى قيمته ٦٥٦١ ، مجموع الستة حدود الأولى منها

٧) متتابعة هندسية حدها الثاني ٢٤، حدها الخامس ٣ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع عدد غير منته من حدودها

٨) متتابعة هندسية حدها الرابع ١٦، حدها السابع ١ أوجد مجموع حدودها إلي مالانهاية

٩) متتابعة هندسية فيها $ع_٢ = ٥$، $ع_٤ = ٢٧$ $ع_٧$ أوجد مجموع عدد غير منته من حدودها

١٠) متتابعة هندسية فيها $ع_٥ = ٨ ع_٢$ ، $ع_٤ + ع_٦ = ٢٤٠$ أوجد مجموع الستة حدود الأولى منها

١١) كم حدا يلزم أخذها من حدود المتتابعة الهندسية (٢ ، ٤، ٨، ...) بدءا من الحد الأول ليكون المجموع ٢٥٤ ، ما رتبة الحد الذى قيمته ١٢٨

١٢) كم حدا يلزم أخذها من حدود المتتابعة الهندسية (١، ٣، ٩، ...) بدءا من حدها الثانى ليكون المجموع ٣٦٣ ثم أوجد حدها التاسع

١٣) مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية يساوى ٤ ، حدها الثانى يساوى –٣ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع الستة حدود الأولى منها

١٤) متتابعة هندسية لا نهائية حدها الثانى يساوى $\frac{٢}{٣}$ ، مجموع حدودها يساوى ٣ أوجد المتتابعة و رتبة الحد الذى قيمته $\frac{١}{٢٤}$

١٥) أوجد $١ + \frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٩} + \cdots \infty$

١٦) إذا كان $س + ١٢ + ٩ + \cdots \infty = ٦٤$ أوجد قيمة س

١٧) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها $ح_{١} + ح_{٢} = ٧٢$ ، $ح_{٣} + ح_{٤} = ٨$ أوجد المتتابعة

١٨) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها $ح_{١} + ح_{٣} = ٢٠$ ، $ح_{٢} + ح_{٤} = ٤٠$ أوجد المتتابعة

١٩) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها $ح_{٢} = ٦$، $ح_{٣} - ح_{١} = ٩$ أوجد المتتابعة

٢٠) متتابعة هندسية حدودها موجبة حدها الرابع يزيد عن حدها الأول بمقدار ٢١ ، حدها الأول ينقص عن حدها الثانى بمقدار ٣ أوجد المتتابعة

٢١) الحد الأول من متتابعة هندسية يساوى ٢ ، حدها الأخير يساوى ٤٨٦، مجموع حدودها يساوى ٧٢٨ أوجد المتتابعة ، عدد حدودها

٢٢) الحد الأول من متتابعة هندسية يساوى ٣، حدها الأخير يساوى ١٩٢، مجموع حدودها يساوى ٣٨١ أوجد المتتابعة ، عدد حدودها

٢٣) $(ح_{ن})$ متتابعة فيها $ح_{٢} = ٥$ ، $٢ ح_{ن+١} = ح_{ن}$ إثبت أنها متتابعة هندسية وأنه يمكن جمع حدودها إلى مالا نهاية وأوجد ذلك المجموع

٢٤) إذا كان $ح_{ن}$ من متتابعة يعطى بالعلاقة $ح_{ن} = \frac{٥}{٢}(١ - ٣^{ن})$ إثبت أنها متتابعة هندسية وأوجد مجموع الستة حدود الأولى منها

٢٥) إذا كان $ح_{ن} = ٢٤٣ \times (-٣)^{-ن}$ فاثبت أن $(ح_{ن})$ متتابعة هندسية واوجد مجموع الخمسة حدود الأولى منها

٢٦) إذا كان مجموع ن حدا الأولى من متتابعة هندسية يعطى

بالقانون $حـ_{ن} = ١٢٨ - (٢)^{٧-ن}$ أوجد المتتابعة

٢٧) متتابعة هندسية حدها الرابع ٤، حدها الأخير ٦٤ فإذا كانت النسبة بين مجموع ن من حدودها إلى مجموع ن من مقلوبات هذه الحدود كنسبة ٣٢ : ١ أوجد المتتابعة

٢٨) متتابعة هندسية مجموع حدودها إلى مالانهاية يساوى ٤ ؛ مجموع مكعبات حدودها إلى مالانهاية يساوى ١٩٢ أوجد المتتابعة

٢٩) أوجد مجموع ن حداً من المتتابعة (١٠ ، ٥ ، $٢\frac{١}{٢}$ ، ...) ثم أوجد مجموع هذه المتتابعة إلى ∞ ، إذا كان : $حـ_{\infty} - حـ_{ن} = ٥ \times ٢^{-١٠}$ أوجد قيمة ن

الوحدة الثانية : التباديل والتوافيق

التباديـــــل

مبدا العد :

إذا أمكن إجراء عملية بعدة طرق مختلفة عددها م ، و فى نفس الوقت أمكن إجراء عملية أخرى بعدة طرق مختلفة عددها ن فإن :

عدد طرق إجراء العمليتين معاً = م × ن

مثـ١ـال من مجموعة الأرقام : ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ كم عدد من رقمين يمكن تكوينه

إذا كان : (١) عدم تكرار أى رقم (٢) يمكن تكرار أى رقم

الحـــــــل

عدد الأرقام = ٥

(١) يمكن ملأ خانة الآحاد بطرق عددها = ٥

،خانة العشرات يمكن ملأها بطرق عددها = ٤ " تستبعد خانة الآحاد لعدم التكرار"

∴ عدد الطرق = ٥ × ٤ = ٢٠ عدداً

(٢) يمكن ملأ خانتى الآحاد و العشرات بطرق عددها = ٥ " مسموح بالتكرار "

∴ عدد الطرق = ٥ × ٥ = ٢٥ عدداً

مثـ٢ـال إذا كان لدينا ٥ مقاعد مختلفة ، فما عدد طرق جلوس ٣ أشخاص على المقاعد ؟

الحـــــــل

يمكن جلوس شخص الأول بطرق عددها ٥

(١) يمكن جلوس شخص الثانى بطرق عددها ٤

(٢) يمكن جلوس شخص الثالث بطرق عددها ٣

∴ يمكن جلوس الأشخاص الثلاثة بطرق عددها ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠ طريقة

التباديل :

هو ترتيب لعدة أشياء مختلفة بأخذها كلها أو بعضها فى كل مرة و يرمز له بالرمز

" ن ل ر " حيث : ن هو العلم ، ر هو الدليل ، ر ≤ ن

قوانين التباديل :

(١) $^{ن}ل_{ر} = ن\,(ن-١)\,(ن-٢) \;\cdots\cdots\; (ن-ر+١)$

= حاصل ضرب عوامل عددها ر تبدأ بالعدد ن و كل عامل ينقص

عن سابقه بمقدار "١" و العامل الأخير ينقص عن الفرق بين ن ، ر بمقدار "١"

مثلاً : $^{٨}ل_{٣} = ٨ \times ٧ \times ٦ = ٣٣٦$

(٢) نعلم أن : $^{٣}ل_{٣} = ٣ \times ٢ \times ١$ هو عدد التباديل " التراتيب " التى يمكن

تكوينها من ثلاثة أشياء مأخوذة كلها يرمز لهذا الناتج بالرمز $\underline{٣|}$ و يقرأ مضروب ٣

$\underline{ن|} = {}^{ن}ل_{ن} = ن\,(ن-١)\,(ن-٢) \;\cdots\cdots\; \times ٣ \times ٢ \times ١$

مثلاً : $\underline{٥|} = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

(٣) $\underline{ن|} = ن\,\underline{ن-١|}$

مثلاً : $\underline{٥|} = ٥\,\underline{٤|} = ٥ \times ٤\,\underline{٣|}$

(٤) $^{ن}ل_{ر} = \dfrac{\underline{ن|}}{\underline{ن-ر|}}$

مثلاً : $^{٦}ل_{ر} = \dfrac{\underline{٦|}}{\underline{٦-ر|}}$

(٥) $^{٠}ل_{٠} = \underline{٠|} = ١$

مثـ٣ـال : إذا كان : $^{ن}ل_{٤} = ٨٤٠$ أوجد قيمة ن

الحل

$\because\; {}^{ن}ل_{٤} = ٨٤٠$

نبحث عن عدة عوامل متتالية حاصل ضربها = ٨٤٠

$\therefore\; {}^{ن}ل_{٤} = {}^{٧}ل_{٤} \qquad \therefore\; ن = ٧$

٨٤٠	٢
٤٢٠	٢
٢١٠	٢
١٠٥	٣
٣٥	٥
٧	٧
١	

مثـ٤ـال: إذا كان : $^{8}ل_{ر} = ١٦٨٠$ أوجد قيمة ر

الحـــــــــل

$\because$ $^{8}ل_{ر} = ١٦٨٠$

نبحث عن عدة عوامل أكبرها ٨ و حاصل ضربها = ١٦٨٠

$\therefore$ $^{8}ل_{ر} = {}^{8}ل_{٤}$ $\therefore$ ر = ٤

١٦٨٠	٨
٢١٠	٧
٣٠	٦
٥	٥
١	

مثـ٥ـال: إذا كان : $\lfloor ن = ٧٢٠$ أوجد قيمة ن

الحـــــــــل

$\because$ $\lfloor ن = ٧٢٠$

نبحث عن عدة عوامل أصغرها ١ و حاصل ضربها = ٧٢٠

$\therefore$ $\lfloor ن = \lfloor ٦$ $\therefore$ ن = ٦

٧٢٠	١
٧٢٠	٢
٣٦٠	٣
١٢٠	٤
٣٠	٥
٦	٦
١	

مثـ٦ـال: إذا كان : $^{٢ن+١}ل_{٤}$: $^{٢ن-١}ل_{٣}$ = ٧٢ : ٥ أوجد قيمة ن

الحـــــــــل

$$\frac{\lfloor ٢ن + ١}{\lfloor ٢ن - ٣} \div \frac{\lfloor ٢ن - ١}{\lfloor ٢ن - ٤} = \frac{٧٢}{٥}$$

$$\frac{(٢ن+١)(٢ن)\lfloor ٢ن-١}{(٢ن-٣)\lfloor ٢ن-٤} \times \frac{\lfloor ٢ن-٤}{\lfloor ٢ن-١} = \frac{٧٢}{٥}$$

٢ (ن) (٢ن + ١) × ٥ = ٧٢ (٢ن − ٣)

١٠ن^{٢} + ٥ ن = ٧٢ ن − ١٠٨

١٠ن^{٢} − ٦٧ ن + ١٠٨ = ٠

(ن − ٤) (١٠ ن − ٢٧) = ٠

أما : ن = ٢,٧ مرفوض أو ن = ٤

مثــ٧ــال: إذا كان : $ل^{م+ن}_{م} = ٢١٠$ ، $ل^{م-ن}_{م} = ٦$ أوجد قيمة م ، ن

الحـــــــل

$ل^{م+ن}_{م} = ٢١٠ = ٧ \times ٦ \times ٥ = ل^{٧}_{م}$

$\therefore م + ن = ٧$ (١)

$ل^{م-ن}_{م} = ٦ = ٣ \times ٢ = ل^{٦}_{م}$

$\therefore م - ن = ٦$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) $\therefore م = ٥$ بالتعويض فى (١) $\therefore ن = ٢$

تمارين على التباديل

أولا: إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه

(١) عدد طرق جلوس ٤ طلاب فى أربعة مقاعد فى سف يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٤ + ٤ (جـ) ٤×٤ (د) ٤×٣×٢×١

(٢) عدد الأعداد الفردية من ثلاث أرقام مختلفة من الأرقام { ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨} تساوى ....

(أ) ٨×٦×٣ (ب) ٤×٣×٢ (جـ) ٤×٣×٣ (د) ٣×٢×١

(٣) عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين من الأرقام { ٥ ، ٣ ، ٢ ، ٠ } تساوى ....

(أ) ٣×٢ (ب) ٤×٣ (جـ) ٣×٣ (د) ٤×٢

(٤) لجنة مؤلفة من ١٢ عضواً بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب رئيس لهذة اللجنة ......

(أ) ٢ (ب) ٢٣ (جـ) ٦٦ (د) ١٣٢

(٥) إذا كان $ل^{٥}_{ر} = ٦٠$ فإن ر تساوى ......

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٥

(٦) إذا كان $ل^{ن}_{٣} = ١٢٠$ فإن ر تساوى ......

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٣

(٧) عدد طرق ترتيب ٧ أطفال فى دائرة يساوى ......

(أ) ١ (ب) ٧ (جـ) ٧٢٠ (د) ٥٠٤٠

(٨) عدد طرق ترتيب حروف كلمة مصنع تساوى ......

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ١٠ (د) ٢٤

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية

(١) من مجموعة الأرقام : ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ بكم طريقة يمكن تكون عدد يتكون من : ١ ــ ثلاثة أرقام مختلفة ٢ ــ الأرقام جميعاً دون تكرار

٣ ــ خمسة أرقام مختلفة و يقبل القسمة على ٢

٤ ــ أربعة أرقام مختلفة و رقم آحاده ٧

(٢) بكم طريقة يمكن لأربعة أشخاص الجلوس فى صف به ٨ مقاعد

(٣) أوجد قيمة : $\underline{٦|} - \underline{٥|}$

(٤) أثبت أن : $\underline{٧|} - \underline{٤|} = ٢٠٩ \; \underline{٤|}$

(٥) إذا كان : $\underline{ن|} = ١٢٠$ أوجد قيمة : $ل^{ن}_{٣}$

(٦) إذا كان : $١٥ \; \underline{ن|} = \underline{١٥|}$ أوجد قيمة : $\underline{ن - ٤|}$

(٧) إذا كان : $ل^{٩}_{ر} = ٥٠٤$ أوجد قيمة : $ل^{٢ر}_{٤}$

(٨) إذا كان : $ل^{ن}_{ر} = ١٧١٦٠$ ، $\underline{ر|} = ٢٤$ أوجد قيمة : $ل^{ن+ر}_{ن-ر}$

(٩) إذا كان : $\underline{ن+٥|} : \underline{ن+٣|} = ٦٥$ أوجد قيمة : $\underline{ن+٤|}$

(١٠) إذا كان : $ل^{ن}_{٣} = ٨ \times ل^{ن-١}_{٢}$ أوجد قيمة : $ل^{ن+٣}_{ن-٣}$

(١١) إذا كان : $ل^{ن-١}_{٣} : ل^{ن+١}_{٣} = ٥ : ١٢$ أوجد قيمة : $\underline{ن-٣|}$

(١٢) أثبت أن : $ل^{١٠}_{ر} \; \underline{١٠-ر|} - \underline{٩|} = ٨١ \; \underline{٨١|}$

(١٣) اثبت أن : $\underline{ن+٣|} : \underline{ن|} = (ن + ٣) \times ل^{ن+٢}_{٢}$

(١٥) أثبت أن : $\underline{٨٠|} = ٢^{٤٠} (١ \times ٣ \times ٥ \times \cdots \times ٧٩) \; \underline{٤٠|}$

التوافيـــــــق

التوافيق :

هو كل مجموعة تتكون من كل أو بعض الأشياء بصرف النظر عن ترتيب عناصر هذه المجموعة

الفرق بين التباديل و التوافيق :

إذا كانت : س = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ }

و أردنا تكوين عدد مكون من ثلاثة أرقام فإن : عدد التباديل = $^{٤}\text{ل}_{٣}$ = ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤

مع ملاحظة :

الإهتمام بالترتيب الذى نختار به الأشياء فالتبديل ٧٥٣ يختلف عن ٧٣٥ يختلف عن ٣٥٧ فكلاً منها يعطى عدداً مخالفاً عن الآخر برغم أن كلاً منها يتكون من نفس الأرقام

أما إذا أردنا تكوين مجموعات جزئية من هذه المجموعة بحيث كل منها يتألف من ثلاثة عناصر فإنها تكون : { ٣ ، ٤ ، ٥ } ، { ٣ ، ٤ ، ٧ } ، { ٣ ، ٥ ، ٧ } ، { ٤ ، ٥ ، ٧ }

مع ملاحظة : أن الإختيار{ ٣ ، ٤ ، ٥ }هو نفسه الإختيار{ ٤ ، ٣ ، ٥ }هو نفسه الإختيار { ٥ ، ٣ ، ٤ } أى عدم الإهتمام بالترتيب و تكون الأهمية فقط لمجموعة الأشياء التى تختار

العلاقة بين التباديل و التوافيق :

$$^{ن}\text{ق}_{ر} = \frac{^{ن}\text{ل}_{ر}}{|\underline{ر}} = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)\cdots\cdots \times (ن-ر+١)}{ر(ر-١)(ر-٢)\cdots\cdots\times ٣ \times ٢ \times ١}$$

ملاحظات :

(١) عدد عوامل البسط = عدد عوامل المقام = ر

(٢) فى البسط نبدأ بالعدد ن و فى المقاقم نبدأ بالعدد ر

مثـ١ـال : بكم طريقة يمكن تكوين لجنة مكونه من ٤ أشخاص من بين ١١ شخصاً

الحـــــــل

لاحظ عدم الإهتمام بترتيب الأشخاص فى اللجنة التى نختارها لذا فإن هذه اللجان هى توفيقات

∴ عدد طرق إختيار اللجان = $^{١١}\text{ق}_{٤} = \frac{^{١١}\text{ل}_{٤}}{|\underline{٤}}$

$= \frac{١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٣٣٠$

قوانين التوافيق :

(١) ${}^{ن}ق_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن - ر}}$ فمثلاً : ${}^{١٥}ق_{ر} = \frac{\underline{|١٥}}{\underline{|ر}\ \underline{|١٥ - ر}}$

(٢) ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن - ر}$ " قانون التبسيط " (تسمى التوفيقتان متكاملتين)

فمثلاً : ${}^{١٦}ق_{١٣} = {}^{١٦}ق_{٣} = \frac{١٦ × ١٥ × ١٤}{٣ × ٢ × ١} = ٥٦٠$

، ${}^{ن}ق_{ن - ٣} = {}^{ن}ق_{٣} = \frac{ن(ن - ١)(ن - ٢)}{٣ × ٢ × ١}$

(٣) ${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$ ، ${}^{ن}ق_{١} = ن$ ، ${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١} = {}^{ن+١}ق_{ر+١}$

فمثلاً : ${}^{١٦}ق_{١٦} = {}^{١٦}ق_{٠} = ١$ ، ${}^{١٦}ق_{١} = ١٦$

(٤) إذا كان ${}^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص}$ فإن س = ص أو س + ص = ن

فمثلاً :

(١) إذا كان : ${}^{ن}ق_{١٠} = {}^{ن}ق_{٥}$ فإن : ن = ١٠ + ٥ = ١٥

(٢) إذا كان : ${}^{١٦}ق_{ر+٥} = {}^{١٦}ق_{٢ر-١٠}$ فإن :

إما : ر + ٥ = ٢ر − ١٠ و منها : ر = ١٥ مرفوض

لأن : ر + ١٥ = ٢٠ > ١٦

إما : ر + ٥ + ٢ر − ١٠ = ١٦ و منها : ر = ٧

(٣) إذا كان : ${}^{١٦}ق_{ر+١} = {}^{١٦}ق_{٢ر+٤}$ فإن :

إما : ر + ١ = ٢ر + ٤ و منها : ر = −٣ "سالب" مرفوض

إما : ر + ١ + ٢ر + ٤ = ١٦ و منها : ر = $\frac{١١}{٢}$ "كسر" مرفوض

(٤) إذا كان : ${}^{١٤}ق_{ر+٦} = {}^{١٤}ق_{٣ر}$ فإن :

إما : ر + ٦ = ٣ر و منها : ر = ٣

إما : ر + ٦ + ٣ر = ١٤ و منها : ر = ٢

(٤) النسبة بين $^{ن}ق_{ر}$ ، $^{ن}ق_{ر-١}$ ∴ $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$

فمثلاً : $\frac{^{١٧}ق_{٦}}{^{١٧}ق_{٥}} = \frac{١٧ - ٦ + ١}{٦} = ٢$

مثـ٢ـال : أوجد قيمة كل من $^{٦}ق_{٤}$ ، $^{٧}ق_{٤}$ ، $^{١٢}ق_{٩}$ ، $^{٤٥}ق_{١}$

الحـــــــــل

∵ $^{٦}ق_{٤} = \frac{^{٦}ل_{٤}}{|٤} = \frac{٦×٥×٤×٣}{٤×٣×٢×١} = ١٥$ (ممكن بالآلة الحاسبة)

∵ $^{٧}ق_{٤} = \frac{^{٧}ل_{٤}}{|٤} = \frac{٧×٦×٥×٤}{٤×٣×٢×١} = ٣٥$ (ممكن بالآلة الحاسبة)

∵ $^{١٢}ق_{٩} = {^{١٢}ق_{٣}} = \frac{^{١٢}ل_{٣}}{|٣} = ٢٢٠$ ، $^{٤٥}ق_{١} = ٤٥$

مثـ٣ـال : إذا كان $\frac{^{٧}ق_{ر}}{^{٧}ق_{ر-١}} = \frac{٣}{٥}$ أوجد قيمة ر

الحـــــــــل

$\frac{^{٧}ق_{ر}}{^{٧}ق_{ر-١}} = \frac{٧ - ر + ١}{ر} = \frac{٨ - ر}{ر} = \frac{٣}{٥}$

∴ ٤٠ − ٥ ر = ٣ ر و منها : ر = ٥

مثـ٤ـال: إذا كان : $^{٢٨}ق_{ر} = {^{٢٨}ق_{٢ر-٤٧}}$ أوجد قيمة ر

الحـــــــــل

∴ ر = ٢ ر − ٤٧ ∴ ر = ٤٧

أ، ر + ٢ ر − ٤٧ = ٢٨ ∴ ٣ ر = ٧٥ ∴ ر = ٢٥

مثـ٥ـال : أعلنت شركة عن وجود ٥ وظائف بها بشرط أن تشغل سيدتان وظيفتين منها فتقدم لها ٧ رجال ، ٤ سيدات . بكم طريقة يمكن اختيار الأشخاص الخمسة

الحـــــــــل

يمكن أخيار ٣ رجال من ٧ بطرق عددها = $^{٧}ق_{٣} = \frac{٧×٦×٥}{٣×٢×١} = ٣٥$

يمكن أخيار ٢ رجال من ٤ بطرق عددها = ${}^{٤}ق_{٢}$ = $\frac{٤\times٣}{٢\times١}$ = ٦

∴ عدد الطرق الممكنة لاختيار الأشخاص الخمسة = ٣٥ × ٦ = ٢١٠ طريقة

مثـ٦ـال : فصل دراسى به ١٠ طلاب ، ٨ طالبات . بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة سداسية تتألف من ثلاث طلاب وثلاث طالبات من هذا الفصل

الحـــــــل

يمكن أخيار ٣ طلاب من ١٠ طلاب = ${}^{١٠}ق_{٣}$ = $\frac{١٠\times٩\times٨}{٣\times٢\times١}$ = ١٢٠

يمكن أخيار ٢طالبة من ط طالبات = ${}^{٨}ق_{٣}$ = $\frac{٨\times٧\times٦}{٣\times٢\times١}$ = ٥٦

∴ عدد الطرق الممكنة لاختيار الأشخاص الخمسة = ١٢٠ × ٥٦ = ٦٧٢٠ طريقة

مثـ٧ـال: إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر}$ = ١٢٠ ، ${}^{ن}ل_{ر}$ = ٧٢٠ أوجد قيمة كل من : ن ، ر

الحـــــــل

∵ ${}^{ن}ق_{ر}$ = $\frac{{}^{ن}ل_{ر}}{|\underline{ر}}$ = $\frac{٧٢٠}{|\underline{ر}}$ = ١٢٠

∴ $|\underline{ر}$ = $\frac{٧٢٠}{١٢٠}$ = ٦ = ٣ × ٢ × ١ = $|\underline{٣}$ ∴ ر = ٣

، ∵ ${}^{ن}ل_{٣}$ = ٧٢٠ = ١٠ × ٩ × ٨ = ${}^{١٠}ل_{٣}$ ∴ ن = ١٠

مثـ٨ـال: إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر}$ = ٢٠ ، ${}^{ن}ل_{ر}$ = ١٢٠ أوجد قيمة كل من : ن ، ر

الحـــــــل

∵ ${}^{ن}ق_{ر}$ = $\frac{{}^{ن}ل_{ر}}{|\underline{ر}}$ = $\frac{١٢٠}{|\underline{ر}}$ = ٢٠

∴ $|\underline{ر}$ = $\frac{١٢٠}{٢٠}$ = ٦ = ٣ × ٢ × ١ = $|\underline{٣}$ ∴ ر = ٣

، ∵ ${}^{ن}ل_{ر}$ = ١٢٠ = ٦ × ٥ × ٤ = ${}^{٦}ل_{٣}$ ∴ ن = ٦

مثـ٩ـال: أثبت أن : $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن-1}ق_{ر-1}} = \frac{ن}{ر}$ ومن ذلك أوجد قيمة : $\frac{{}^{36}ق_{12}}{{}^{35}ق_{11}}$

الحـــــــل

∵ $ {}^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!} = \frac{ن\,(ن-1)!}{ر\,(ر-1)!\,(ن-ر)!}$ (١)

، $ {}^{ن-1}ق_{ر-1} = \frac{(ن-1)!}{(ر-1)!\,(ن-ر)!}$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) ينتج :

∴ $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن-1}ق_{ر-1}} = \frac{ن\,(ن-1)!}{ر\,(ر-1)!\,(ن-ر)!} \times \frac{(ر-1)!\,(ن-ر)!}{(ن-1)!} = \frac{ن}{ر}$

، $\frac{{}^{36}ق_{12}}{{}^{35}ق_{11}} = \frac{36}{11} = 3$

مثـ١٠ـال: إذا كان : ${}^{ن}ق_{3} : {}^{ن+2}ق_{4} = 5 : 18$ أوجد قيمة ن

الحـــــــل

${}^{ن}ق_{3} : {}^{ن+2}ق_{4} = \frac{ن!}{3!\,(ن-3)!} \div \frac{(ن+2)!}{4!\,(ن+2-4)!} = 5 : 18$

∴ $\frac{ن!}{3!\,(ن-3)!} \times \frac{4 \times 3!\,(ن-2)\,(ن-3)!}{(ن+2)(ن+1)\,ن!} = \frac{5}{18}$

∴ $5\,(ن+2)\,(ن+1) = 18 \times 4\,(ن-2)$

$5ن^2 + 15ن + 10 = 72ن - 144$

$5ن^2 - 57ن + 154 = (ن-7)\,(5ن-22) = $ صفر ∴ $ن = 7$

تمارين على التوافيق

أولا: إختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه

(١) عدد طرق اختيار ٣ أشخاص من ٥ أشخاص يساوى ....

ⓐ ١٥   ⓑ ١٠   ⓒ ٢٠   ⓓ ٣٥

(٢) عدد طرق الإجابة عن ٤ أسئلة فقط فى امتحان يحتوى على ٦ أسئلة تساوى ....

ⓐ ٣٠   ⓑ ١٥   ⓒ ٢٤   ⓓ ١٠

(٣) عدد طرق اختيار كرة حمراء وأخرى بيضاء من بين ٥ كرات حمراء ، ٣ كرات بيضاء تساوى

ⓐ ١٥   ⓑ ٨   ⓒ ٦٠   ⓓ ٢

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية

(١) إذا كان : $^{ن}ق_{٧} = {}^{ن}ق_{٥}$ أوجد قيمة : $^{ن}ق_{١٠}$

(٢) إذا كان : $^{١٥}ق_{ر} = {}^{١٥}ق_{٦}$ أوجد قيمة : ر

(٣) إذا كان : $^{٢٥}ق_{٣ر - ٥} = {}^{٢٥}ق_{٢ر}$ أوجد قيمة : ر

(٤) إذا كان : $^{ن}ق_{ن - ٢} = ٣٦$ أوجد قيمة : ن

(٥) إذا كان : $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ل_{ر}$ أوجد قيمة : ر

(٦) إذا كان : $^{ن}ق_{٤} : {}^{ن - ٢}ق_{٣} = ٧ : ٢$ أوجد قيمة : ن

(٧) إذا كان : $^{ن}ق_{٥} : {}^{ن}ق_{٤} = ٨ : ٥$ أوجد قيمة : ن

(٨) إذا كان : $^{١٥}ق_{٢ر - ١} = {}^{١٥}ق_{ر + ٤}$ أوجد قيمة : $^{١٥}ق_{ر}$

(٩) إذا كان : $^{١٢}ق_{ر} = {}^{١٢}ق_{٢ر + ٣}$ ، $^{ن}ل_{ر} = ٢١٠$ أوجد قيمة : $|\underline{ن - ر}$

(١٠) إذا كان : $^{ن}ق_{٢} = ١٥$ ، $|\underline{ن - ر} = ٢٤$ أوجد قيمة : $^{ن + ١}ق_{ر + ١}$

(١١) إذا كان : $|\underline{ن} = ٧٢٠$ ، $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٣ : ٤$ أوجد قيمة : $^{ن}ل_{ر}$

(١٢) إذا كان : $^{ن}ل_{٢} = ٤٢$ ، $|\underline{ن-ر} = ١٢٠$ أوجد قيمة : $^{ن}ق_{ر+٣}$

(١٣) إذا كان : $٥\ {}^{ن}ق_{٦} = ١٢\ {}^{ن}ق_{٤}$ أوجد قيمة : $^{ن-٣}ل_{٣}$

(١٤) إذا كان : $|\underline{ن} = {}^{٥}ق_{٢} \times {}^{٩}ل_{٢}$ أوجد قيمة : ن

(١٥) أثبت أن : $\frac{^{ن}ق_{ر} - {}^{ن-١}ق_{ر-١}}{^{ن}ق_{ر}} = \frac{ن-ر}{ن}$

و من ثم أوجد قيمة : $\frac{^{١٠٠}ق_{١٠٠} - {}^{٩٩}ق_{٩٩}}{^{١٠٠}ق_{١٠٠}}$

(١٦) أثبت أن : $\frac{^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١}}{^{ن}ق_{ر}} = \frac{ن+١}{ر+١}$ و من ذلك أوجد قيمة : ن

إذا كان : $\frac{^{ن}ق_{٨} + {}^{ن}ق_{٩}}{^{ن}ق_{٨}} = \frac{٧}{٣}$

(١٧) أثبت أن : $^{ن}ق_{ر-١} : {}^{ن+١}ق_{ر} = ر : ن+١$ ثم أوجد قيمة ن

التى تحقق المعادلة : $^{٣ن+١}ق_{ن} = \underline{١٦}\ {}^{٣ن}ق_{ن-١}$

(١٨) أثبت أن : $^{١}ق_{٠} + {}^{٢}ق_{١} + {}^{٣}ق_{٢} + \cdots + {}^{ن-١}ق_{ن-٢} + {}^{ن}ق_{ن-١}$

$= ١ + ٢ + ٣ + \cdots + (ن-١) + ن$